Analysis II

im Sommersemester 2018

Präsenzaufgaben)

- A) Untersuchen Sie, ob es sich bei der Funktion $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ mit $f(x) := \sin(x)$ um eine Kontraktion handelt.
- B) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (2x + y, y^2 - x^2)^T$. Untersuchen Sie, ob die Bildmenge $f((0, 2) \times (0, 1))$ offen ist.
- C) Bestimmen Sie alle regulären Punkte von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := y + x \sin(y)$.

Aufgabe 44) (Gradientenvektorfelder) (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $f: (-6, 6)^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ \frac{x^2}{2} + y + az \\ by \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche a, b ist f ein Gradientenvektorfeld?
- (b) Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Stammfunktionen von f .
- (c) Berechnen Sie für die Situation (a) mit Hilfe von (b) das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f \cdot \vec{dx}$ für $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 5t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 45) (Umkehrsatz) (4 Punkte)

Seien $D := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (a) Erläutern Sie anhand einer Skizze kurz die Bedeutung der Argumente r , φ und θ , und bestimmen Sie das Bild $f(D)$ in kartesischen Koordinaten, d.h. als Menge von Punkten $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, ohne r , φ und θ zu verwenden.
- (b) Zeigen Sie: f ist injektiv, und um jeden Punkt aus D gibt es eine offene Umgebung U derart, dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: Die zweite Eigenschaft besagt, dass f lokal umkehrbar ist.

- (c) Begründen Sie warum $g := f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie $(Dg)(x, y, z)$ für alle $(x, y, z)^T \in f(D)$.

bitte wenden

Aufgabe 46) (Implizite Funktionen) (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + \frac{1}{4} = 0$$

in der Nähe von $(x, y)^T = (\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/4)^T$ nach $y = h(x)$ aufgelöst werden kann, und bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von h .

(b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(x, y, u, v)^T = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ nach $(u, v)^T = h(x, y)$ aufgelöst werden kann, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von h in der Nähe von $(1/2, 0)^T$.

(c) [ohne Wertung] Kann in der Situation aus (b) das Gleichungssystem in der Nähe des Punktes $(x, y, u, v)^T = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ auch nach $(y, v)^T = g(x, u)$ aufgelöst werden?

Aufgabe 47) (Integralgleichungen; ohne Wertung)

Sei $K: [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig Funktion, und es gebe eine Konstante $L \in (0, 1)$ derart, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}^m$ und alle $s, t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$|K(s, t, u) - K(s, t, v)| \leq L|u - v|$$

erfüllt ist. Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $f \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ gibt mit

$$f(s) = \int_0^1 K(s, t, f(t)) dt \quad \text{für alle } s \in [0, 1].$$