Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 39) (Bogenlänge) (4 Punkte)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes für vektorwertige Funktionen aus der Vorlesung, dass f rektifizierbar ist mit

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \;\middle|\; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\right\} = \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t \,,$$

wobei das Supremum über beliebige Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ gebildet wird.

Aufgabe 40) (Vollständige Untersuchung auf Extrema) (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 y(4 - x - y) \,,$$

und sei $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0,\, x + y \leq 6\}$. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f auf D in den folgenden typischen Schritten:

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf $\mathring{D}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f auf ∂D.
Tipp: Geeignete Parametrisierung von Komponenten von ∂D.

(c) Begründen Sie, warum globale Extrema von f auf D angenommen werden, und geben Sie mit Hilfe von (a) und (b) an, wo diese auf D angenommen werden.

(d) Untersuchen Sie, ob die übriggebliebenen Extrema auf ∂D lokale Extrema auf D sind.

Aufgabe 41) (Das Fehlerintegral) (4 Punkte)

Seien $f, g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y \,, \quad g(x) := \left(\int_0^x e^{-y^2} \, \mathrm{d}y\right)^2 .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Summe $f + g$ konstant ist.

(b) Folgern Sie, dass $g(x) = \pi/4 - f(x)$ für alle $x \geq 0$ und schließen Sie daraus, dass

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \,.$$

bitte wenden

Aufgabe 42) (Gradientenvektorfelder) (4 Punkte)

Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2)^T .$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$. Ist F ein Gradientenvektorfeld? Begründen Sie Ihre Aussage und diskutieren Sie an diesem Beispiel die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien aus der Vorlesung.

Aufgabe 43) (Extrema; ohne Wertung)

Sei $f\colon [0,\infty)^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}}}{1 + x_1 + \dots + x_n}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in [0,\infty)^n .$$

(a) Untersuchen Sie f auf globale Extrema. (Zur Kontrolle: Globales Maximum ist $\frac{1}{n+1}$)
Hinweis: Zeigen Sie, dass globale Maxima von f für hinreichend große $R > 0$ nicht auf $\partial\mathcal{K}_R$ mit $\mathcal{K}_R := \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in [0,\infty)^n \mid x_1 + \dots + x_n \le R\}$ liegen können.

(b) Folgern Sie für $y_1, \dots, y_{n+1} > 0$ die Ungleichung

$$\sqrt[n+1]{y_1 \cdot \dots \cdot y_{n+1}} \le \frac{y_1 + \dots + y_{n+1}}{n+1} .$$

Tipp: Man betrachte zuerst den Fall $y_{n+1} = 1$.

Abgabe bis Montag, den 25. Juni 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.