technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung

# Analysis II

im Sommersemester 2018

## Präsenzaufgaben)

A) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x$. Zeigen Sie nach Definition, dass dann auch $\alpha f + g$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ in $x$ differenzierbar ist.

Bestimmen Sie für die angegebene Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Hessematrix im angegebenen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie, ob diese positiv/negativ (semi-)definit oder indefinit ist:

B) $f(x, y) = \sin(xy)$, $p = (\pi, 1/2)^T$.

C) $f(x, y) = \exp(x - 2y)$, $p = (-1, 1)^T$.

## Aufgabe 35) (Mittelwertsätze) (2+2=4 Punkte)

(a) Wir betrachten $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (\cos(x), \sin(x))^T$. Zeigen Sie, dass es **keine** Zwischenstelle $\xi \in (0, 2\pi)$ gibt mit

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = f'(\xi)\,.$$

**Bemerkung:** Damit ist der aus Analysis I bekannte Mittelwertsatz im Falle von vektorwertigen Kurven also nicht mehr gültig.

(b) Zeigen Sie den folgenden *Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen:*

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien ferner $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\xi \in (0, 1)$ mit

$$f(x + h) - f(x) = \nabla f(x + \xi h) \cdot h\,.$$

## Aufgabe 36) (Taylorpolynome) (4 Punkte)

Auf der oberen Halbebene $H := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ betrachten wir $f\colon H \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^3}$.

(a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von $f$ zum Entwicklungspunkt $(1, 2)^T$ und nutzen Sie das Ergebnis, um den Wert von $\sqrt{0{,}97^2 + 2{,}01^3}$ anzunähern. Vergleichen Sie ihre Näherung mit dem tatsächlichen (z.B. mit Computerunterstützung ermittelten) Wert. Auf wie viele Nachkommastellen genau ist diese?

(b) Schreiben Sie $f(1 + t, 2 + s)$ als

$$f(1 + t, 2 + s) = c\sqrt{1 + g(t, s)}$$

mit einer geeigneten Funktion $g$ und einer Konstanten $c > 0$. Setzen Sie anschließend $g(t, s)$ in das zweite Taylorpolynom von $r \mapsto \sqrt{1 + r}$ zum Entwicklungspunkt $r = 0$ ein und berücksichtigen Sie nur Terme in $(t, s)$ bis zur Ordnung 2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (a).

*bitte wenden*

**Aufgabe 37) (Extrema)** (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := (x^2+y^2-2)(x^2-y^2-1)$.

(a) Bestimmen Sie die Bereiche, wo $f$ positiv, negativ oder null ist und skizzieren Sie diese. Begründen Sie anhand der Skizze, dass $f$ mindestens 4 Sattelpunkte (d.h. kritische Punkte, in denen kein lokales Extremum vorliegt), ein lokales Maximum und zwei lokale Minima besitzen muss.

(b) Berechnen Sie die kritischen Punkte von $f$ und bestimmen Sie jeweils, falls möglich, mit Hilfe der Hessematrix, ob und welche Art von lokalen Extrema vorliegen.

Die folgende Aufgabe dient als Diskussionsgrundlage für die Übung. Bei unzureichender Vorbereitung findet eine entsprechende Diskussion in der Übung gar nicht oder nur in stark reduzierter Form statt.

**Aufgabe 38) (Mindmap zu Differenzierbarkeit; ohne Wertung)**

Stellen Sie mit Hilfe einer Mindmap die Implikationen zwischen den folgenden Eigenschaften einer Funktion in einem Punkt dar: „stetig“, „total differenzierbar“, „alle Richtungsableitungen existieren“, „partiell differenzierbar“, „stetig differenzierbar“.
Arbeiten Sie inbesondere heraus, welche Sätze bei welchen Implikationen eingehen und welche Implikationen nicht gelten (mit den passenden Gegenbeispielen).

Abgabe bis Montag, den 18. Juni 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.