technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 31) (Differentialoperatoren in Polarkoordinaten) (4 Punkte)

Die *Polarkoordinaten* $p\colon (0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$p(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Sei nun $f \in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ und $g := f\circ p$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

(a) $\big((\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2\big)\circ p = (\partial_1 g)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_2 g)^2 \quad$ auf $\quad (0,\infty)\times[0,2\pi)$.

(b) $(\partial_1\partial_1 f + \partial_2\partial_2 f)\circ p = \partial_1\partial_1 g + \frac{1}{r}\partial_1 g + \frac{1}{r^2}\partial_2\partial_2 g \quad$ auf $\quad (0,\infty)\times[0,2\pi)$.

Aufgabe 32) (Die Quotientenregel) (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 5.13(3): Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U\to\mathbb{R}^m$, $g\colon U\to\mathbb{R}$ und $x\in U$. Sind f und g differenzierbar in x und gilt $g(x)\neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon \{y\in U \mid g(y)\neq 0\}\to\mathbb{R}^m$ in x differenzierbar mit

$$\Big(D\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{1}{g(x)^2}\big(g(x)(Df)(x) - f(x)(Dg)(x)\big).$$

Tipp: Man betrachte zunächst den Fall $f = 1$.

Aufgabe 33) (Stetige Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Auf $U := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)^T\}$ betrachten wir $f\colon U\to\mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) := (x_1^2+x_2^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\Big)$ für alle $(x_1,x_2)^T\in U$. Zeigen Sie:

(a) $f\in C^1(U)$.

(b) f ist zu einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbaren Funktion fortsetzbar.

(c) Die Fortsetzung von f aus (b) ist auf $\mathbb{R}^2$ nicht stetig differenzierbar.

bitte wenden

Aufgabe 34) (Stetige Differenzierbarkeit II) (4 Punkte)

Auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ betrachten wir $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) := x_1x_2\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ für alle $(x_1,x_2)^T \in U$. Zeigen Sie:

(a) $f \in C^2(U)$.

(b) f ist zu einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbaren Funktion fortsetzbar.

(c) Die Fortsetzung von f aus (b) ist auf $\mathbb{R}^2$ zwar zweimal partiell differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar.
Tipp: Man vergleiche die Werte von $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ und $\partial_2\partial_1 f(0,0)$.

Abgabe bis Montag, den 11. Juni 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.