

Analysis II

im Sommersemester 2018

Präsenzaufgaben)

- A) Berechnen Sie $\int_{\gamma} f \, ds$ für $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := x + 3z$ und $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) := (t, t^2, 2t^3/3)^T$. Ist γ regulär?
- B) Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma} f \, d\vec{x}$ für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (x^2 - y^2, \sqrt{1 - y^2})^T$ und $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (t, \cos(t))^T$. Ist γ einfach?
- C) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $V: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(x, y) := 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ und verifizieren Sie die Identität

$$(x, y)^T \cdot (\partial_1 V(x, y), \partial_2 V(x, y))^T = -V(x, y) \quad \text{für alle } (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}.$$

Aufgabe 28) (Differenzierbarkeit I) (4 Punkte)

Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := xg(y)$. Zeigen Sie, dass f genau dann im Punkt $(0, 0)^T$ differenzierbar ist, wenn g in 0 stetig ist.

Aufgabe 29) (Partielle Ableitungen und Stetigkeit) (4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Zeigen Sie: Sind alle partiellen Ableitungen von f auf U beschränkt, so ist f stetig.

Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung in einer Veränderlichen.

Aufgabe 30) (Differenzierbarkeit II) (4 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = (0, 0)^T$ die Funktion $f \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt 0 differenzierbar ist. Ist f im Punkt $(0, 0)^T$ differenzierbar?

Tipp: Fallunterscheidung nach $\gamma'(0) = (0, 0)^T$ und $\gamma'(0) \neq (0, 0)^T$.