Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 23) (Hermitesche Formen und innere Produkte) (3+1=4 Punkte)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir nennen eine Abbildung $b: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ eine *hermitesche Form* auf X , wenn b die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (1) $b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
- (2) $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$ für alle $x, y \in X$.

Insbesondere definiert jedes innere Produkt auf X eine hermitesche Form.

- (a) Sei b eine hermitesche Form auf X mit $b(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie:

$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x)b(y, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Tipp: Man untersuche für $x, y \in X$ die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto b(x + ty, x + ty) \geq 0$ auf Minima. Hierbei Fallunterscheidung nach $b(y, y) = 0$ und $b(y, y) \neq 0$.

- (b) Sei nun speziell $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf X . Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad x \in X,$$

eine Norm $\|\cdot\|$ auf X definiert.

Bemerkung: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ reduziert sich die Eigenschaft (2) für hermitesche Formen auf $b(x, y) = b(y, x)$ für alle $x, y \in X$. Man nennt b dann auch eine *symmetrische Form* auf X .

Aufgabe 24) (Orthogonale Komplemente) (1+1+2=4 Punkte)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf X mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ (vgl. Aufgabe 23b).

Für eine nichtleere Teilmenge U von X definieren wir das *orthogonale Komplement* von U durch

$$U^\perp := \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in U\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $U^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X .
- (b) Es gilt $U^\perp = (\overline{U})^\perp$.
- (c) Ist U ein Unterraum von X und $x \in X$, so sind für $y \in U$ die folgenden Aussagen äquivalent:
 - i) $d_U(x) = \|x - y\|$ mit d_U wie in Aufgabe 19;
 - ii) $x - y \in U^\perp$.

Tipp: Für $u \in U$ betrachte man die Abbildung $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \|x - (y + \lambda u)\|^2$.

bitte wenden

Aufgabe 25) (Orthogonale Komplemente II) (4 Punkte)

Auf dem Vektorraum $X = C^0([-1, 1]) = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ sei das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

gegeben. Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\| \cdot \|$.

Wir betrachten in X die Unterräume U und V mit

$$U := \{f \in X \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \leq 0\}$$

und

$$V := \{f \in X \mid f(0) = 0\}.$$

Bestimmen Sie die orthogonalen Komplemente $U^\perp$ und $V^\perp$ (vgl. Aufgabe 24). Belegen Sie außerdem anhand eines Beispiels, dass es nicht für alle $f \in X$ ein $g \in U$ mit

$$d_U(f) = \|f - g\|$$

geben muss. Hierbei ist d_U wieder wie in Aufgabe 19 definiert.

Aufgabe 26) (Kurven) (2+2=4 Punkte)

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine reguläre Kurve mit Länge $L := L(f)$. Zeigen Sie, dass f nach der Bogenlänge parametrisiert werden kann, d.h. es gibt eine Parametertransformation $\phi: [0, L] \rightarrow [a, b]$ mit $\phi' > 0$ derart, dass die Kurve $f \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Tipp: Man betrachte $s: [a, b] \rightarrow [0, L]$ mit $s(t) := L(f|_{[a,t]})$.

- (b) Sei die Kurve $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) := e^t(\cos(t), \sin(t))^T$. Bestimmen Sie die Länge dieser Kurve und parametrisieren Sie f nach der Bogenlänge.

Aufgabe 27) (Folgen- und Überdeckungskompaktheit; ohne Wertung)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $K \subset X$ folgenkompakt. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und Punkte $a_1, \dots, a_n \in K$ derart, dass $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(a_j)$.

Tipp: Widerspruchsbeweis.

- (b) K ist überdeckungskompakt.

Tipp: Teil (a) und Aufgabe 21.