Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Wichtige Mitteilung: Wegen Pfingstmontag sind die Hausaufgaben von diesem Blatt bereits am Freitag, den 18. Mai, bis 12 Uhr abzugeben.

Präsenzaufgaben)

Untersuchen Sie, ob die angegebene Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$ zu einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetigen Funktion fortgesetzt werden kann und geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Funktionswert im Punkt $(0,0)^T$ an:

A) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

B) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

C) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Aufgabe 20) (Schnitte kompakter Mengen) (4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n \subset X$ eine nichtleere kompakte Menge und es gelte $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ nicht leer ist.

Aufgabe 21) (Offene Überdeckungen) (4 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Seien ferner $K \subset X$ folgenkompakt, I eine beliebige Indexmenge und $\{U_j\}_{j\in I}$ eine offene Überdeckung von K (d.h. alle U_j sind offen und es gilt $K \subset \bigcup_{j\in I} U_j$).

Zeigen Sie: Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, dass es zu jeder nichtleeren Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} < \varepsilon$ ein $j \in I$ gibt mit $A \subset U_j$.

Hinweise: Widerspruchsbeweis mit der Wahl $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Überdeckungskompaktheit von K soll hier **nicht** verwendet werden.

Aufgabe 22) (Stetigkeit) (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xe^{-1/y^2}}{x^2+e^{-2/y^2}}\,, & y \neq 0\,, \\ 0\,, & y = 0\,. \end{cases}$$

Für $n,m \in \mathbb{N}$ betrachten wir Kurven $\gamma_{m,n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_{m,n}(t) := (t^m, t^n)^T$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(\gamma_{m,n}(t))$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ existiert. Ist f im Punkt $(0,0)^T$ stetig?

Abgabe bis Freitag, den 18. Mai 2018, um 12 Uhr in die Übungskästen.