technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Präsenzaufgaben)

Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf X definiert:

A) $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

B) $X = \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \sqrt{|x-y|}$

C) $X = (0,\infty), \quad d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{xy}$

Aufgabe 17) (Kompakte Mengen I) (2+2=4 Punkte)

Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ mit einer Metrik $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$.

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass $A \cap B$ und $A \cup B$ ebenfalls kompakt sind.

(b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

kompakt ist.

Gilt diese Aussage auch noch, wenn man überall kompakt durch abgeschlossen ersetzt?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass in metrischen Räumen Folgenkompaktheit und (Überdeckungs-)Kompaktheit äquivalent sind.

Aufgabe 18) (Stetigkeit) (4×1=4 Punkte)

Sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik und D mit der davon induzierten Metrik.

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad g(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) f und g sind stetig.

(b) g ist stetig nach ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{g} = g$ auf D.

(c) f ist nicht stetig nach $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar.

(d) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist die durch $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto f(x,y)$ gegebene Funktion zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion fortsetzbar.

Tipp: Fallunterscheidung nach $y \neq 0$ und $y = 0$.

bitte wenden

Aufgabe 19) (Die Abstandsfunktion) (4×1=4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $\mathbb{R}$ sei mit der vom Betrag induzierten Metrik ausgestattet. Für eine nichtleere Teilmenge $A \subset X$ definieren wir $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$d_A(x) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} .$$

(a) Zeigen Sie: d_A ist Lipschitz-stetig, genauer: $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(b) Zeigen Sie: $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn $d_A(x) = 0$.

Seien nun $A, B \subset X$ nichtleer und abgeschlossen mit $A \cap B = \varnothing$.

(c) Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ gibt mit den Eigenschaften:

- $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$;
- $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
- $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in B$;

Hinweis: Verwenden Sie d_A und d_B und beachten Sie die Teile (a) und (b).

(d) Folgern Sie: Es gibt offene Mengen $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $B \subset V$ und $U \cap V = \varnothing$.