

Analysis II

im Sommersemester 2018

Wichtige Mitteilung: Auf diesem Blatt stehen ausnahmsweise keine Präsenzaufgaben. Diese werden statt dessen auf Blatt 5 nachgeholt.

Aufgabe 13) (Topologie in $\mathbb{R}^2$) (4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen A_j des $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y| \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1 \text{ und } |y| \leq 1 \right\}.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob A_j offen, abgeschlossen oder keines von beidem ist (mit Begründung). Geben Sie außerdem jeweils den offenen Kern, den Abschluss und den Rand von A_j in Formeln an (ohne Begründung).

Aufgabe 14) (Topologie) (2+2=4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Seien $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

i) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

ii) $(A \cup B)^\circ \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$; belegen Sie anhand eines Beispiels, dass Gleichheit hier nicht zu gelten braucht.

(b) Sei $A \subset X$. Wir nennen $x \in X$ einen *Häufungspunkt* von A , wenn $B_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ für alle $r > 0$ gilt. Wir setzen $H_A := \{x \in X \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$.

Zeigen Sie:

i) A ist genau dann abgeschlossen, wenn $H_A \subset A$ gilt.

ii) H_A ist abgeschlossen.

Aufgabe 15) (Dichtheit) (2+2=4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass eine Teilmenge $A \subset X$ in X *dicht liegt*, wenn $\overline{A} = X$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass für $A \subset X$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i) A liegt dicht in X .
- ii) Jede offene Kugel in X enthält einen Punkt aus A .
- iii) Jedes $x \in X$ ist Grenzwert einer Folge aus A .

(b) Sei $S \subset X$ nichtleer. Auf S ist dann durch $d_S(x, y) := d(x, y)$ für $x, y \in S$ eine Metrik $d_S: S \times S \rightarrow [0, \infty)$ gegeben.

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset S$ genau dann dicht in S liegt (bzgl. d_S), wenn $S \subset \overline{A}$ gilt. Hierbei bezeichnet $\overline{A}$ den Abschluss von A in (X, d) .

Aufgabe 16) (Normen und Metriken) (2+1+1=4 Punkte)

(a) Auf $\mathbb{R}^d$ betrachten wir die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ mit

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_j| \mid j = 1, \dots, d\}$$

für $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$. Bestimmen Sie (von d abhängige) Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 \quad \text{und} \quad c_2^{-1} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir nun mit d_1 die vom Betrag induzierte Metrik, und eine weitere Metrik $d_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sei gegeben durch

$$d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

(b) Zeigen Sie: Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann bzgl. der Metrik d_1 , wenn sie bzgl. d_2 konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Ein Nachweis der Norm- bzw. Metrikeigenschaften ist hier nicht erforderlich.

Bemerkung: Eine alternative Formulierung von (b) wäre, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann offen bzgl. der Metrik d_1 ist, wenn sie offen bzgl. d_2 ist. Die beiden Metriken liefern also dieselbe Topologie. Teil (c) besagt dann, dass Vollständigkeit keine topologische Eigenschaft ist, sondern von der gewählten Metrik abhängt.