

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 8) (Differentialgleichungen) (4 Punkte)

Finden Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = 0 \quad \text{für } |x| < 1$$

und

$$f(0) = 1 = f'(0).$$

Aufgabe 9) (Taylorreihen) (4 Punkte)

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in (a, b)$, und sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei ferner p eine reelle Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Konvergenzradius ungleich 0.

Zeigen Sie: Gilt $f = p$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$, so ist p schon die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0 , d.h. es gilt

$$f = T_f = p \quad \text{in } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Bemerkung: Die Funktion f ist dann also reell analytisch in x_0 .

- (b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{1}{(1-x)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

im Entwicklungspunkt 0. Wo stimmt diese mit der Funktion f überein?

- (c) Welche rationale Funktion hat die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ als Taylorreihe im Entwicklungspunkt 0?

Aufgabe 10) (Metrische Räume) (2+2=4 Punkte)

- (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- i) Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert.
- ii) Konvergente Folgen in X sind beschränkt.
- iii) Konvergente Folgen in X sind Cauchyfolgen.

- (b) Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Wir definieren $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X definiert. Ist der metrische Raum (X, d) vollständig?

bitte wenden

Aufgabe 11) (Vollständigkeit) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Der normierte Raum $(C^0([-1, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ ist vollständig.

(b) Der normierte Raum $(C^1([-1, 1]), \|\cdot\|)$ mit

$$\|f\| := \|f\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}}$$

ist vollständig.

(c) Der normierte Raum $(C^1([-1, 1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ ist **nicht** vollständig.

Hinweis: Der Nachweis der Normeigenschaften ist nicht erforderlich.

Aufgabe 12) (Vollständigkeit II; ohne Wertung)

Zeigen Sie: Der normierte Raum $(C^0([-1, 1]), \|\cdot\|)$ mit

$$\|f\| := \int_{-1}^1 |f(x)| \, dx$$

ist **nicht** vollständig.

Hinweis: Der Nachweis der Normeigenschaften ist nicht erforderlich.