Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Präsenzaufgaben)

Bestimmen Sie für die angegebene Folge $(c_k)_k$ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$:

A) $c_k = \dfrac{k!}{2^k}$

B) $c_k = \dfrac{(k!)^2}{k^{2k}}$

C) $c_k = \dfrac{1}{k^k}$

Aufgabe 5) (Konvergenzradien) (4 Punkte)

Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ habe Konvergenzradius R. Bestimmen Sie nun jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{3k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k^m z^k$, $m \in \mathbb{N}$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k^2}$ im Fall $R \in (0, \infty)$

Aufgabe 6) (Entwicklungen als Potenzreihe) (3+1=4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Ausdrücke in z eine Darstellung als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $a = 0$ und geben Sie den zugehörigen Konvergenzradius an:

(i) $\dfrac{z^2}{1 - z^3}$ (ii) $\dfrac{1}{v - uz}$, $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (iii) $\dfrac{1 + z}{2 - 5z + 2z^2}$

Tipp: Geometrische Reihe; für (iii) Partialbruchzerlegung und (ii).

(b) Zeigen Sie, dass für die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Identität

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

für $|x| < 1$ gilt.

Tipp: Differenzieren.

bitte wenden

Aufgabe 7) (Die Binomische Reihe) (4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Wir setzen $\binom{\alpha}{0} := 1$ und $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt.

Anleitung:

(1) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$.

(2) Sei $f(x) := (1+x)^\alpha$. Zeigen Sie, dass

$$(1+x) \cdot g'(x) = \alpha \cdot g(x)$$

sowohl für $g = p$ als auch für $g = f$ erfüllt ist.

(3) Folgern Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{p(x)}{f(x)} = 0$ und schließlich $\frac{p(x)}{f(x)} = 1$.