technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 1) (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz) (4 Punkte)

(a) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := nx(1-x)^n \, .$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ für $n \to \infty$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Für die Funktionen f_n und f aus (a) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \, .$$

(c) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) := \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} \, .$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(g_n)_n$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $g \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, und dass die Funktionenfolge der Ableitungen $(g_n')_n$ punktweise, aber **nicht** gleichmäßig gegen g' konvergiert.

Aufgabe 2) (Gleichmäßige Konvergenz I) (2+2=4 Punkte)

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \frac{x}{n^2 \exp\left(\frac{x}{n}\right)} \, .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Aufgabe 3) (Gleichmäßige Konvergenz II) (2+2=4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$, und seien $f, f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $(f_n)_n$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist f beschränkt, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass f_n für alle $n \geq n_0$ beschränkt ist.

(b) Für $D = \mathbb{R}$ sei f gleichmäßig stetig, und $(\tau_n)_n$ sei eine reelle Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann die Funktionenfolge $(g_n)_n$ mit

$$g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \quad g_n(x) := f_n(x + \tau_n)$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

bitte wenden

Aufgabe 4) (Konvergenzkriterium von Weierstraß) (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$, und sei $(f_k)_k$ mit $f_k \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge derart, dass die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\sup,D}$ konvergiert.

Zeigen Sie, dass dann die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergiert, d.h. dass die Funktionenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ der Partialsummen für $n \to \infty$ gleichmäßig konvergiert.

Tipp: Betrachten Sie zuerst punktweise Konvergenz.

Bemerkung: Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\sup,D}$ ist insbesondere dann gegeben, wenn es eine Zahlenfolge $(M_k)_k$ mit $\|f_k\|_{\sup,D} \le M_k$ für alle k gibt derart, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergiert.