technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

Klausur II zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1) (2+2×3=8 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n^2 - n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) (3 Punkte) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{k^2}$ (ii) (3 Punkte) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\pi}{(k+\pi)^2}$

Aufgabe 2) (6 Punkte)

Finden Sie eine reelle Zahl $r > 0$ so, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-2)^{k+1}\frac{z^k}{k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ divergiert.

Aufgabe 3) (3+3=6 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) (3 Punkte) Ist f in a differenzierbar, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

(b) (3 Punkte) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, so ist f in a differenzierbar.

Aufgabe 4) (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sqrt{|x|^3}\,.$$

Untersuchen Sie in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 5) (2+4=6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)}$.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x}{\sqrt{4-3x}}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6) (6 Punkte)

Seien $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sqrt{x}\,, \quad g(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass es genau ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = g(x_0)$ gibt.
Hinweis: Eindeutigkeit mit Hilfe von Monotonie.

Aufgabe 7) (5 Punkte)

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,.$$

Tipp: Induktion.

Aufgabe 8) (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir definieren $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \int_a^b f(x) \sin(tx)\, \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{|t|\to\infty} g(t) = 0$.

Hinweis: Partielle Integration.