technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. Christoph Schumacher

4. Hausaufgabenblatt

Sonderkurs zur Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1) (Der Flächeninhalt eines Kreises) (4 Punkte)

Der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$ wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschrieben und umschließt bekanntlich die Fläche $A = \pi r^2$. Prüfen Sie diese Formel mit Hilfe einer Integration.

Hinweis: Das im ersten Quadranten gelegene Viertel der Kreisscheibe ist der unterhalb der Kurve $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$, gelegene Bereich. Deshalb ist

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \mathrm{d}x.$$

Man löse dieses Integral mit Hilfe der Substitution $x = r \sin t$.

Aufgabe 2) (Differenzieren nach Integralgrenzen) (4 Punkte)

(a) Es seien $u, v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Hinweis: Drücken Sie das Integral als Differenz zweier Integrale mit fester unterer Grenze $a \in \mathbb{R}$ aus.

(b) Sei nun $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusätzlich auch periodisch mit Periode $p > 0$, das heißt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + p) = f(x)$. Beweisen Sie, dass das Integral

$$\int_x^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ denselben Wert hat.

Aufgabe 3) (Symmetrie und Integration) (4 Punkte)

Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt, wenn f ungerade ist, und dass

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt, wenn f gerade ist.

bitte wenden

Aufgabe 4) (Mittelwertsatz) (4 Punkte)

Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und der Grenzwert $a := \lim_{x\to\infty} f'(x)$ existiere. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\lim_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = a$.

(b) Ist f zusätzlich beschränkt, so ist $a = 0$.

(c) Falls $a = 0$ gilt und f beschränkt ist, so existiert der Limes $\lim_{x\to\infty} f(x)$.