technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić | Dr. Albrecht Seelmann

Klausur I zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1) (2+2×3=8 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) (3 Punkte) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (k!)^2}{(2k)!}$$ (ii) (3 Punkte) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\pi)^2}$$

Aufgabe 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2\sqrt{x}}\right)^k$ konvergiert und geben Sie den Reihenwert als Funktion in x an.

Aufgabe 3) (3+3=6 Punkte)

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) (3 Punkte) Ist f in 0 stetig und g in 0 differenzierbar, und gilt $g(0) = 0$, so ist fg in 0 differenzierbar.

(b) (3 Punkte) Ist f in 0 stetig und g in 0 differenzierbar, und gilt $f(0) = 0$, so ist fg in 0 differenzierbar.

Aufgabe 4) (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(x) + 1\,, & x < 0\,, \\ \exp(x^3)\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 5) (2+4=6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6) (6 Punkte)

Sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ gegeben durch $f(x) := \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x}}$.
Zeigen Sie: f ist bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist differenzierbar.
Hinweis: Eine explizite Darstellung für f^{-1} wird nicht gefordert!

Aufgabe 7) (5 Punkte)

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von partieller Integration, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int\limits_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existiert und den Wert $(n-1)!$ hat.
Hinweis: Induktion.

Aufgabe 8) (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \; f(x) \le 1\,, \\ f(x)\,, & \text{falls } \; f(x) > 1\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g stetig ist.
Tipp: Für Stetigkeit in $x_0 \in \mathbb{R}$ Fallunterscheidung für den Wert von $f(x_0)$.