

2. Hausaufgabenblatt

Sonderkurs zur Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A) Prüfen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{\exp(k)}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Präsenzaufgabe B) Bestimmen Sie $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ für $b_n := \frac{n \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}{n - \cos(n\pi)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe C) Die Schreibweise $0,\bar{9} = 0,9999999 \dots$ steht für die Zahl

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}.$$

Um welche Zahl handelt es sich?

Aufgabe 4)

(4 Punkte)

Wir definieren zu $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$a_0 := \alpha - 1 \quad \text{und} \quad a_n := \alpha - n a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$a_n = (-1)^n n! \left(-1 + \alpha \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

(b) Argumentieren Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{e\}$ divergiert.

Aufgabe 5)

(4 Punkte)

Wir studieren weiter die Folge $(a_n)_n$ aus Aufgabe 4, und zwar für den Spezialfall $\alpha = e$.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Restgliedabschätzung aus Aufgabe 24 (b) bzw. Lemma 5.27, dass für $\alpha = e$ die Folge $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $\alpha = e$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_n := \int_0^1 x^n e^x dx.$$

(c) Begründen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mit Hilfe der Integraldarstellung aus (b).

Aufgabe 6)

(4 Punkte)

Sei $q \in (0, 1)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 21. Februar 2018, um 10:30 Uhr im Kurs.