technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. Christoph Schumacher

1. Hausaufgabenblatt

Sonderkurs zur Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A) Bekannt ist $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$ als Grenzwert in $\mathbb{C}$. Welche beiden Grenzwerte erhält man hieraus durch Beschränkung auf rein imaginäre z?

Präsenzaufgabe B) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $\left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2$.

Präsenzaufgabe C) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$.

Aufgabe 1) (Grenzwerte und 0^0) (4 Punkte)

Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt $x^0 = 1$ und $0^x = 0$. Insbesondere gilt

$$\lim_{x\searrow 0} x^0 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} 0^x = 0.$$

Finden Sie zu jeder Zahl $a \in (0,1)$ zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > 0$ und $r_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{r_n} = a.$$

Finden Sie auch Funktionen $f, g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} g(x) = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} f(x)^{g(x)} = a\,?$$

Tipp: Falls Sie keinen Ansatz finden, überlegen Sie sich zunächst einmal, welche reellen Zahlen Sie als Limes des Quotienten zweier Nullfolgen darstellen können.

Aufgabe 2) (Verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung) (4 Punkte)

Zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass entweder $-1 < x_j < 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ oder $x_j > 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die Ungleichung

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + x_j) > 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

(Inwieweit verallgemeinert dies die Bernoulli-Ungleichung?)

Aufgabe 3) (Betrag, Minimum und Maximum) (4 Punkte)

Man kann die Betragsfunktion $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch definieren als $|x| = \max\{-x, x\}$. Drücken Sie umgekehrt die Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto \max\{x, 0\}$ und $\mathbb{R} \ni x \mapsto \min\{x, -1\}$, mit Hilfe des Betrags aus.

Abgabe bis Montag, den 19. Februar 2018, um 10:30 Uhr im Kurs.