technische universität dortmund — fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić — Dr. Albrecht Seelmann

Probeklausur zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1)

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_k := k^{k(\cos(k\pi)-1)}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

auf Beschränktheit, Konvergenz und bestimmte Divergenz. Falls die Folge beschränkt ist, bestimmen Sie den Limes superior und den Limes inferior der Folge und gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{1+2k^2}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 2)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Aufgabe 3)

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\bigl(\tan(\sqrt{x})\bigr)^2}{x} = 1$$

Aufgabe 4)

Sei $f\colon \bigl[0, \frac{\pi}{2}\bigr] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := -\cos(x) + e^{-x}\,, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Berechnen Sie f' und f'', und zeigen Sie, dass f genau ein lokales Extremum in $\bigl(0, \frac{\pi}{2}\bigr)$ besitzt.

Aufgabe 5)

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und es gelte $f(x) \geq 4\pi$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie **anhand der Definition(!)** des Riemannintegrals (d.h. ohne Verwendung von entsprechenden Integrationssätzen), dass

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 4\pi\,.$$