

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Bemerkung: Die Aufgaben auf diesem Blatt sind nicht mehr relevant für die Studienleistung (Klausurzulassung), erreichte Punkte werden jedoch als Bonuspunkte angerechnet. Der Stoff der hier behandelten Aufgaben ist *klausurrelevant*.

Aufgabe 45) (Elementare Integration) (6×1=6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \int_{-1}^2 |x| \, dx \quad (ii) \int_0^1 e^{-5x} \, dx \quad (iii) \int_1^2 \ln(x) \, dx \quad (iv) \int_0^\pi \cos^2(x) \, dx \quad (v) \int_{-1}^0 x^3 e^{-x} \, dx$$

$$(vi) \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx$$

Tipp zu (iii)–(vi): Partielle Integration.

Aufgabe 46) (Substitution) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale, indem Sie sie durch geeignete Substitution auf einfachere Integrale zurückführen:

$$(i) \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (ii) \int_{-1}^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx \quad (iii) \int_1^4 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \, dx$$

Aufgabe 47) (Eigenschaften integrierbarer Funktionen) (2+2=4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig. Zeigen Sie: Gilt $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, so ist f die Nullfunktion, d.h. es gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Gilt die Aussage auch noch, wenn f statt stetig bloß Riemann-integrierbar ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(b) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \int_a^x f(t) \, dt, \quad x \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass g Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 48) (Ein uneigentliches Riemannintegral) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

über $(0, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

Abgabe bis Montag, den 29. Januar 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.