technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

13. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 41) (Zwischenwerteigenschaft der Ableitung) (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < f'(b)$. Zeigen Sie, dass f' die Zwischenwerteigenschaft besitzt, das heißt, dass es für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < \alpha < f'(b)$ ein $\xi \in (a,b)$ gibt mit $\alpha = f'(\xi)$.

Hinweis: Man zeige, dass die durch $x \mapsto f(x) - \alpha x$ gegebene Funktion ein lokales Extremum in (a,b) annimmt.

Aufgabe 42) (Konvexität) (2+2=4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex.

(a) Seien $x, x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x < x_2$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \,.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass f auf (a,b) stetig ist. Muss f auch auf $[a,b]$ stetig sein? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Hinweis: Zeigen Sie mit Teil (a), dass für jedes $x_0 \in (a,b)$ die durch $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ gegebene Funktion auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

Aufgabe 43) (Integrierbarkeit und Integrale) (4 Punkte)

(a) Wir betrachten die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit (vgl. Aufgabe 25 (b))

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob g Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls das Integral $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Seien ferner $c \in [a,b]$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b] \setminus \{c\}$. Untersuchen Sie, ob g Riemann-integrierbar sein muss, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$ durch explizite Approximation mit geeigneten Riemannsummen.

Tipp: $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{\mathrm{i}x})$ für $x \in \mathbb{R}$.

bitte wenden

Aufgabe 44) (Hauptsatz der Differential- und Integralrechn.) (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe des **Mittelwertsatzes der Differentialrechnung**, dass

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Hinweis: Man approximiere das Integral durch geeignete Riemannsummen.

Bemerkung: Der hier diskutierte Beweis benötigt tatsächlich nur, dass F auf $[a,b]$ differenzierbar und F' auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, aber nicht, dass F' stetig ist; das Integral kann dann immer noch durch Riemannsummen approximiert werden, vgl. die entsprechende Bemerkung aus der Vorlesung.

Abgabe bis Montag, den 22. Januar 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.