

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgaben)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der angegebenen Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

A) $f(x) = 2 + x - x^2$

B) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

C) $f(x) = x \ln(x)$

Aufgabe 38) (Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und bestimmen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $f^{(0)} := f$.

Tipp: Per Induktion zeigt man $f^{(n)}(x) = f(x) \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und ein Polynom P_n .

Aufgabe 39) (Extremstellen) (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen der Funktion $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - |5x - 2| + 6,$$

und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe 40) (l'Hospital) (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (z.B. mit Hilfe der Regel von de l'Hospital):

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x)) \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))}$$