technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 34) (Differenzierbarkeit I) (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir $f_n \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := x^n \cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Untersuchen Sie jeweils, für welche n es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass die Funktion $g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x)\,, & x \neq 0 \\ a\,, & x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 35) (Ableitungen) (2+2=4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen $f \colon D \to \mathbb{R}$:

$$\text{(i)}\quad f(x) = x^x\,,\ D = (0,\infty) \qquad \text{(ii)}\quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,,\ D = (-1,1)$$

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $\operatorname{arcosh} \colon J \to (-\infty, 0]$ aus Aufgabe 29b) von Blatt 9 auf $(1,\infty)$ einmal direkt und einmal über die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Tipp: Man zeige $\big(\cosh'(x)\big)^2 = \big(\cosh(x)\big)^2 - 1$ für alle x.

Aufgabe 36) (Leibniz-Formel für Ableitungen) (3+1=4 Punkte)

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f, g \in C^n(I)$. Zeigen Sie, dass dann $fg \in C^n(I)$ gilt mit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\,.$$

Hierbei sei $f^{(0)} := f$ und entsprechend für g und fg.

(b) Berechnen Sie $h^{(2018)}$ für $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := x^3 e^x$.

bitte wenden

Aufgabe 37) (Gleichungen mit Ableitungen) (2+2=4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant.

(b) Gilt $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ce^x$ für alle $x \in [a,b]$.
Tipp: Man betrachte die durch $x \mapsto f(x)e^{-x}$ gegebene Funktion.

Abgabe bis Montag, den 8. Januar 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.