Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A)

Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Präsenzaufgabe B)

Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ auf Konvergenz.

Präsenzaufgabe C)

Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 31) (Additionstheoreme und Polarkoordinaten) (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und folgern Sie daraus, dass $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Was sind die Werte von $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$?

(b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen mit Hilfe von Polarkoordinaten in die Form $x + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{(i)} \quad (-\sqrt{3}+\mathrm{i})^{28} \qquad \text{(ii)} \quad \exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}\right)$$

Aufgabe 32) (Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\mathrm{i}kx}/k$) (4 Punkte)

(a) Für $x \in (0, 2\pi)$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $s_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}$. Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel, dass

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}\right| \leq \frac{2}{m\sin(x/2)}$$

für alle $x \in (0, 2\pi)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m > 1$.
Tipp: $e^{ikx} = s_k(x) - s_{k-1}(x)$ mit $s_k(x)$ aus (a).

(c) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$ genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, konvergiert.

bitte wenden

Aufgabe 33) (Der komplexe Einheitskreis) (4 Punkte)

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgenden $n+1$ Punkte auf dem komplexen Einheitskreis:

$$z_k^{(n)} := \exp\Big(\mathrm{i} \cdot \frac{k}{n} \cdot x\Big), \quad k = 0, \dots, n\,.$$

Die Länge des zugehörigen Polygonzuges von $z_0^{(n)}$ nach $z_n^{(n)}$ ist dann gegeben durch

$$L_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}|\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $L_n(x) = 2n \left|\sin\Big(\dfrac{x}{2n}\Big)\right|$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \sin\Big(\dfrac{x}{2n}\Big) = x$.

Interpretieren Sie die Ergebnisse, insbesondere für $x \in [0, 2\pi]$.

---

technische universität
dortmund

Lernfahrt
WS 2017/18

Vor Beginn der Klausurenphase organisiert die Fachschaft Mathematik Lernmöglichkeiten mit Unterstützung professioneller Tutor*innen in entspannter Atmosphäre!

Wann?
19.01.2018 - 21.01.2018

Für Wen?
Für alle Student*innen der Fächer Analysis I, Lineare Algebra I, Lineare Algebra I für GymGe-Lehramt, Arithmetik und Didaktik I, Algebra/Funktionen und ihre Didaktik I für Sonder/Grund/(H/R/Ge)-Lehramt

Wo?
Jugendherberge Velbert (Düsseldorf, Kreis Mettmann)

Kosten?
Pro Person 45 €; Anreise auf eigene Kosten

Sonstiges?
Die Zahl der Anmeldungen ist auf 140 Personen begrenzt, um eine intensive Lernbegleitung zu ermöglichen

Die Anmeldung zur Lernfahrt ist - je nach Fach - ab Freitag, den 24.11.2017 oder Mittwoch, den 29.11.2017 möglich. Weitere Informationen auch zur Anmeldung auf der Seite der Fachschaft!

fachschaft
mathematik