Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung

# Analysis I

im Wintersemester 2017/18

## Aufgabe 27) (Gleichmäßige Stetigkeit) (1+1+2=4 Punkte)

(a) Sei $D$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Zeigen Sie: Ist $f$ Lipschitzstetig, so ist $f$ auch gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie: Die durch $f(x) = x^2$ gegebene Funktion ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $D = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$, Lipschitzstetig, auf $D = [0, \infty)$ aber nicht.

(c) Zeigen Sie: Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig.

## Aufgabe 28) (Eigenschaften stetiger Funktionen) (2+1+1=4 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ einen Fixpunkt hat, d.h. dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Seien $D$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig stetige Funktion und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit $x_k \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass dann $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist.

(c) Gilt die Aussage aus (b) auch noch, wenn $f$ bloß stetig ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

## Aufgabe 29) (Monotonie und Umkehrfunktionen) (2+2=4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Zeigen Sie: cosh ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend. Geben Sie $J := \cosh(\mathbb{R}) = \{\cosh(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ explizit an.

(b) Sei $J$ wie in (a). Zeigen Sie: Die Funktion $\operatorname{arcosh}\colon J \to (-\infty, 0]$ mit

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{für} \quad y \in J$$

ist die Umkehrfunktion von $\cosh|_{(-\infty,0]}\colon (-\infty, 0] \to J$ (negativer Ast von cosh).

## Aufgabe 30) (Grenzwerte) (4×1=4 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\Big(\dfrac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}\Big)$ (ii) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln(x)\,,\ \alpha > 0$ (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

*Hinweis zu (ii)–(iv):* Rückführung auf bekannte Grenzwertaussagen (vgl. Blatt 8) durch geeignete Variablentransformation.

Abgabe bis Montag, den 11. Dezember 2017, um 14 Uhr in die Übungskästen.

technische universität
dortmund

# Lernfahrt
# WS 2017/18

**Vor Beginn der Klausurenphase organisiert die Fachschaft Mathematik Lernmöglichkeiten mit Unterstützung professioneller Tutor*innen in entspannter Atmosphäre!**

**Wann?**
19.01.2018 - 21.01.2018

**Für Wen?**
Für alle Student*innen der Fächer Analysis I, Lineare Algebra I, Lineare Algebra I für GymGe-Lehramt, Arithmetik und Didaktik I, Algebra/Funktionen und ihre Didaktik I für Sonder/Grund/(H/R/Ge)-Lehramt

**Wo?**
Jugendherberge Velbert (Düsseldorf, Kreis Mettmann)

**Kosten?**
Pro Person 45 €; Anreise auf eigene Kosten

**Sonstiges?**
Die Zahl der Anmeldungen ist auf 140 Personen begrenzt, um eine intensive Lernbegleitung zu ermöglichen

**Die Anmeldung zur Lernfahrt ist - je nach Fach - ab Freitag, den 24.11.2017 oder Mittwoch, den 29.11.2017 möglich. Weitere Informationen auch zur Anmeldung auf der Seite der Fachschaft!**

fachschaft mathematik