Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgaben)

Untersuchen Sie, ob der angegebene Grenzwert existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}$

B) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Aufgabe 24) (Die Exponentialfunktion I) (1+2+1=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K > 0$ mit

$$\frac{x^n}{\exp(x)} < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > K\,.$$

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{2}{(n+1)!}|z|^{n+1} \qquad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| \leq 1 + \frac{n}{2}\,.$$

Tipp: Geometrische Reihe.

(c) Folgern Sie aus (b), dass

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1\,.$$

Aufgabe 25) (Stetigkeit) (2+2 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x(1-x)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von f einmal anhand der Definition (ε-δ) und einmal mit Hilfe der Folgen-Charakterisierung.

(b) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt stetig ist.

bitte wenden

Aufgabe 26) (Die Exponentialfunktion II) (4 Punkte)

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ eine gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergente Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)\,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(1) Begründen Sie, warum die Gleichung $x^n - y^n = (x-y)\cdot\sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot y^{n-1-k}$ aus der Vorlesung auch für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt, und wählen Sie speziell $x := \exp\left(\frac{z_n}{n}\right)$ und $y := 1 + \frac{z_n}{n}$.

(2) Zeigen Sie, dass $|x-y| \leq \frac{\alpha^2}{n^2}$ für hinreichend große n mit $\alpha := \sup_{k\in\mathbb{N}}|z_k|$.

(3) Zeigen Sie, dass $\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot y^{n-1-k}\right| \leq n \cdot \exp(\alpha)$ mit α wie in (2).

(4) Zeigen Sie die Behauptung.

Abgabe bis Montag, den 4. Dezember 2017, um 14 Uhr in die Übungskästen.