technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 20) (Reihen) (1+3=4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{(-1)^k}{3^k}\Big).$$

(b) Untersuchen Sie für die nachstehenden Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(i)}\quad a_k=\frac{1}{k^2}+\frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{k+1}\qquad \text{(ii)}\quad a_k=\frac{(k!)^2}{(2k)!}\qquad \text{(iii)}\quad a_k=\Big(\frac{1+k\mathrm{i}}{4k+\mathrm{i}}\Big)^k\cdot\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^{k^2}$$

Aufgabe 21) (Konvergenzkriterien I) (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller oder komplexer Zahlen mit $b_k\neq 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Ist die Folge $\Big(\frac{|a_k|}{|b_k|}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|b_k|}>0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

$$\text{(i)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{2k^3-k+1}$$

Aufgabe 22) (Konvergenzkriterien II) (2+2=4 Punkte)

(a) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_k:=\begin{cases}\dfrac{2}{k+1}, & k \text{ ungerade}\\[1ex] 2^{-k/2}, & k \text{ gerade}\end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ divergiert (Achtung: Nicht absolut konvergente dürfen nicht ohne Weiteres umgeordnet werden!). Warum ist das kein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium?

(b) Wir betrachten die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k:=\dfrac{2+(-1)^k}{2^k}$, $k\in\mathbb{N}$. Welche Aussage bezüglich der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ lässt sich mit Hilfe des Quotientenkriteriums treffen? Was liefert hier das Wurzelkriterium?

bitte wenden

Aufgabe 23) (Limes superior und Limes inferior) (1+2+1=4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \leq a_k \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq K\,.$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie:

Die Folge $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Tipp: Teil (a).

(c) Was besagt Teil (b) im Hinblick auf die Anwendung von Quotienten- und Wurzelkriterium für Reihen?