

Elektrische Energieübertragungssysteme

von Edmund Handschin
o. Professor an der Universität Dortmund
Lehrstuhl für elektrische Energieversorgung

2. Auflage

Dr. Alfred Hüthig Verlag Heidelberg

EDMUND HANDSCHIN studierte an der Eidgenössischen Technischen Hochschule ETH in Zürich Elektrotechnik. Nach Abschluß der Diplomprüfung 1965 arbeitete er als wissenschaftlicher Angestellter am Imperial College of Science and Technology der Universität London in London. Er promovierte 1969 im dortigen Center of Computing und Automation und arbeitete anschließend als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Forschungszentrum der Firma Brown Boveri & Co AG in Baden/Schweiz. Seit 1974 ist er ordentlicher Professor an der Universität Dortmund und Inhaber des Lehrstuhls für elektrische Energieversorgung.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Handschin, Edmund:

Elektrische Energieübertragungssysteme / von Edmund Handschin. –

2. Aufl. – Heidelberg: Hüthig, 1987.

ISBN 3-7785-1401-6

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© 1987 Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH Heidelberg

Printed in Germany

Satz: K + V Fotosatz GmbH, 6124 Beerfelden

Vorwort

Die systemtechnische Behandlung elektrischer Energieübertragungssysteme hat durch folgende Entwicklung der letzten Jahre an Bedeutung enorm zugenommen. Die Verknappung und Verteuerung der fünf Primärenergieträger Kohle, Gas, Erdöl, Wasser und Kernbrennstoff für die Stromerzeugung hat zur Notwendigkeit geführt, bestehende Anlagen optimal auszunützen und die weitere Ausbauplanung sehr ausführlich und mit zahlreichen Varianten im Detail zu analysieren. Der Übergang zu größeren Blockeinheiten im Kraftwerksbau zusammen mit höheren Übertragungsspannungen erfordern eine genaue Erfassung der stationären und dynamischen Netz- und Kraftwerksvorgänge, um mögliche Störungen und deren Auswirkungen genauer erfassen und nachbilden zu können. Das große Interesse der Öffentlichkeit an energietechnischen und energiewirtschaftlichen Fragen verlangt nach umfassender und verständlicher Darstellung der das Energieversorgungssystem beschreibenden, technischen Zusammenhänge. Die rasante Entwicklung auf dem Gebiet der Elektronik und der Computertechnik hat neue Möglichkeiten eröffnet, das sehr komplexe Überwachungs- und Führungsproblem elektrischer Energieübertragungssysteme mit modernen Methoden zu lösen. Die Netz- und Kraftwerksleittechnik mit der Anlagentechnik zu verbinden war ein wichtiges Ziel bei der Gestaltung dieses Buches. Dabei zeigte sich, daß die klassische Einteilung der Elektrotechnik in Stark- und Schwachstromtechnik ihre Gültigkeit zunehmend verliert, da sich interdisziplinäre Gesichtspunkte immer mehr in den Vordergrund drängen. Für die Behandlung leittechnischer Probleme müssen die systemtechnischen und anlagentechnischen Gesichtspunkte miteinander verbunden werden, um so die Basis für ein umfassendes Verständnis beider Wissensgebiete zu schaffen.

Der Untersuchung dynamischer Vorgänge im Kurz- und Mittelzeitbereich kommt heute eine große Bedeutung zu. Es schien mir deshalb wichtig, die verschiedenen Ansätze und Modelle in einer systematischen Darstellung zu behandeln. Insbesondere die konsequente Unterteilung in Kurz- und Mittelzeitdynamik eröffnet die Möglichkeit, den verschiedenen Aufgabenstellungen angepaßte Lösungsmethoden zu behandeln. Die hier gewählte Darstellung beruht auf einer Vorlesung, die ich in den letzten Jahren an der Universität Dortmund gehalten habe.

Ich möchte an dieser Stelle allen Mitarbeitern meines Lehrstuhls für elektrische Energieversorgung an der Universität Dortmund für deren Unterstützung im Hinblick auf die Erstellung dieses Buches danken. Besonders möchte ich dabei die kritische Durchsicht und die Anregungen von Herrn Dipl.-Ing. N. Aschöwer, Herrn Dr.-Ing. E. Grebe und Herrn Dr.-Ing. J. Voß erwähnen. Die zahlreichen, dynamischen Simulationsrechnungen sind mit dem von Herrn Dipl.-Ing. D. König entwickelten Softwarepaket PDS durchgeführt worden.

Symbolverzeichnis

A	Matrix oder Koeffizientenschema
a_{ij}	Element der Matrix A in der Zeile i und der Spalte j
A^*	zu A konjugiert komplexe Matrix
A^{-1}	zu A inverse Matrix
A^T	zu A transponierte Matrix
$\text{diag } A$	Diagonalelemente der Matrix A
$\bar{a}$	komplexer Drehfaktor um 120°
B'	Systemmatrix des stationären Wirkleistungsmodelles (P - δ Modell)
B''	Systemmatrix des stationären Blindleistungsmodelles (Q - U Modell)
B	Gewichtungsfaktor für die Frequenzabweichung in der Netzregelung
$\bar{b}$	komplexes Dämpfungsmaß
β	Reaktanzverhältnis
C'	Kapazitätsbelag einer Leitung pro Längeneinheit
c	Synchronisierkoeffizient
$c_i = \alpha + \beta P_{Gi} + \gamma P_{Gi}^2$	Energieerzeugungskosten des i -ten Kraftwerkes in Abhängigkeit der Wirkleistung P_{Gi}
C	Energieerzeugungskosten in DM/h
dc_i/dP_{Gi}	Inkremental-Kosten, Zuwachskosten
D	Diagonalmatrix mit den Elementen d_{ii}
D	Dämpfungskonstante eines Synchrongenerators (Dämpferwicklung)
δ	Spannungswinkel oder Phasenwinkel zwischen Polradspannung und Referenzachse, Polradwinkel
Δ	untere Dreiecksmatrix
∇	obere Dreiecksmatrix
E'	transiente Polradspannung
E''	subtransiente Polradspannung
$\bar{E}$	Polradspannung des Synchrongenerators
ε	Konvergenzschranke
f	Frequenz
$f(x, u, p) = 0$	kompakte Schreibweise der nichtlinearen, stationären Lastflußgleichungen
ϕ	Lastwinkel
$G(s)$	Übertragungsfunktion
G	Estimationsmatrix
H	Meßmodellmatrix, JACOBISCHE Matrix der Netzgleichungen $z = h(x)$
I	Einheitsmatrix
i_i	Einheitsvektor mit dem Element i ungleich Null

$\bar{I}_{ij}$	komplexer Leitungsstrom von Knoten i nach Knoten j
$\bar{I} = I_p + jI_q$	Zerlegung des komplexen Stromes in Wirk- und Blindstrom
I_k	Vektor aller komplexen Knotenströme $\bar{I}_i$
I_k''	Anfangs-Kurzschlußwechselstrom, subtransienter Kurzschluß-Strom
I_k'	transienter Kurzschluß-Strom
I_k	stationärer Kurzschluß-Strom
I^f	Fehlerstrom mit dem Satz von THEVENIN berechnet
I_d	Längsstrom
I_q	Querstrom
J	JACOBISCHE Matrix der Lastflußgleichungen mit den Teilmatrizen J_1, J_2, J_3, J_4 resp. H, N, M, L
J_x	JACOBISCHE Matrix von f bezüglich x
J_u	JACOBISCHE Matrix von f bezüglich u
J_p	JACOBISCHE Matrix von f bezüglich p
$J(x)$	gewichtete Fehlersumme bei State Estimation
K_L	Netzleistungszahl
K_I	Integrationskonstante des Sekundärreglers
L'	Induktivitätsbelag einer Leitung pro Längeneinheit
λ	LAGRANGE-Multiplikator
M	Drehmoment
n	Anzahl der Netzknoten in einem Energieübertragungssystem
η	Redundanz bei State Estimation
p	Polpaarzahl
P	Störvektor bestehend aus den Knotenlasten P_{Li} und Q_{Li}
R	Ohmscher Widerstand
R	Gewichtungsmatrix oder Kovarianzmatrix des Meßfehlers v
r	Residuenvektor
$\bar{S} = P + jQ$	komplexe Scheinleistung bestehend aus Wirk- und Blindleistung P resp. Q
S_k'	transiente Kurzschluß-Leistung
S_k''	subtransiente Kurzschluß-Leistung
S_p	Sensitivitätsmatrix bezüglich p
S_u	Sensitivitätsmatrix bezüglich u
s	LAPLACE-Operator
T	Sensitivitätsmatrix für die Untersuchung des Regeltransformators
T_A	Anlaufzeitkonstante
T_r	Leerlaufzeitkonstante der Erregungseinrichtung
T_d'	transiente Zeitkonstante der Erregungseinrichtung
T	Transformationsmatrix von symmetrischen Komponenten auf physikalische Größen (Phasengrößen)
t	Zeit
$\bar{U} = U/\delta$	komplexe Spannung in Polarkoordinaten
$\bar{U} = e + jf$	komplexe Spannung in kartesischen Koordinaten
U_k	Vektor aller komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$
u	Steuervektor bestehend aus den Einspeisungen P_{Gi} und Q_{Gi}
U_l	Längsspannung
U_q	Querspannung
$\bar{u}$	Übersetzungsverhältnis eines Transformators (reell oder komplex)
V	Verstärkungsfaktor
v	Meßfehlervektor
v'	Meßfehlervektor mit einem großen Fehler

W	kinetische Energie
$\mathbf{W}$	Fehlersensitivitätsmatrix
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\mathbf{X}$	Sensitivitätsmatrix für die Untersuchung des Regeltransformators
X_d''	subtransiente Synchronmaschinenreaktanz
X_d'	transiente Synchronmaschinenreaktanz
X_d	Längsreaktanz
$\bar{Y} = G + jB$	Admittanz bestehend aus Konduktanz und Suszeptanz G resp. B
$\mathbf{Y}_k$	Knotenadmittanzmatrix
$\bar{y}_{ij} = g_{ij} + j b_{ij}$	komplexes Element der Knotenadmittanzmatrix in kartesischen Koordinaten
$\bar{y}_{ij} = y_{ij} / \theta_{ij}$	komplexes Element der Knotenadmittanzmatrix in Polarkoordinaten
$\mathbf{Y}$	Sensitivitätsmatrix für die Untersuchung des Regeltransformators
$\mathbf{Y}^f$	Admittanzmatrix zur Beschreibung der Fehlerstelle
$\mathbf{Y}_s$	Knotenadmittanzmatrix in symmetrischen Komponenten
$\mathbf{Y}_s^f$	auf symmetrische Komponenten transformierte Fehlermatrix $\mathbf{Y}^f$
$\mathbf{Y}_{i-j}$	Vierpolmatrix eines Übertragungselementes zwischen Knoten i und j
$\bar{y}_{ii}^j = g_{ii}^j + j b_{ii}^j$	komplexes Diagonalelement von $\mathbf{Y}_{i-j}$
$\bar{y}_{ij} = g_{ij} + j b_{ij}$	komplexes Element von $\mathbf{Y}_{i-j}$ außerhalb der Diagonale
$\bar{Z} = R + jX$	Impedanz bestehend aus Widerstand und Reaktanz R resp. X
$\bar{Z}_u$	Längsimpedanz eines Übertragungselementes
$\bar{Z}_k$	Kurzschluß-Impedanz eines Transformators
$\bar{Z}_N$	Netzimpedanz
$\bar{Z}_a$	äquivalente Netzimpedanz nach Netzreduktion
$\mathbf{Z}_k$	Knotenimpedanzmatrix mit den komplexen Elementen $\bar{z}_{ij}$
$\mathbf{Z}_s$	Knotenimpedanzmatrix in symmetrischen Komponenten
$\bar{Z}^f = 1 / \bar{Y}^f$	Kurzschlußimpedanz an der Fehlerstelle
$\bar{Z}_w$	Wellenwiderstand
$\mathbf{z}$	Meßvektor

Indizes

a, b, c	Leiterbezeichnungen in Drehstromsystemen
a0	Größe zwischen Leiter a und Erde
B	Bezugsgröße
e	elektrische Größe
E	Erregungseinrichtung
F	Fehlerstelle
f	hochgestellter Index bezeichnet Größen, die im Fehlerfall auftreten
G resp. L	Einspeisung resp. Last
i, j	Knotenindizes
i	Netzbereich
k	Iterationszähler oder auf Knoten bezogene Vektoren/Matrizen
Ku	Kurzunterbrechung
M	Motor
m	mechanische Größe
N	Nenngröße
pu	bezogene, dimensionslose Größen
p	Vektoren/Matrizen bestehend aus physikalischen Größen des Drehstromsystems
R	Drehzahlregelung

r	Primärregelung
ref	Referenzgröße
s	Sekundärregelung, stabil
S	Stellglied
s	Vektoren/Matrizen bestehend aus symmetrischen Komponentengrößen
T	THEVENIN-Größe
T	Turbine
vb	Verbundleistung
Δ resp. λ	Dreieck- resp. Sterngröße in Drehstromsystemen
0	hochgestellter Index bezeichnet Größe, die im Normalfall auftritt
$\hat{\star}$	mit State Estimation bestimmte Größe

Komplexe Größen sind durch Überstreichen, Vektoren und Matrizen durch Fettdruck gekennzeichnet. Konjugiert komplexe Größen sind durch einen Stern * gekennzeichnet. Der Index einer Größe gibt an, auf welchen Knoten sich diese Größe bezieht. Der hochgestellte Index gibt bei rekursiven Algorithmen den Iterationsschritt an; um ihn vom Exponenten einer Größe unterscheiden zu können, wird folgende Konvention gemacht:

U_i^2	bezeichnet den quadrierten Spannungsbetrag in Knoten i
$(U_i^k)^2$	bezeichnet den k -ten Iterationswert des quadrierten Spannungswertes in Knoten i

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	VII
1 Anwendung der Matrizenrechnung	1
1.1 Begriffe, Definitionen und Notation	1
1.2 Matrizenbeziehungen	4
1.3 Lineare Gleichungssysteme	4
1.3.1 Homogenes Gleichungssystem	5
1.3.2 Konzept der Dreiecksfaktorisierung	5
1.3.3 Erweiterung	6
1.4 Dreiecksfaktorisierung	7
1.4.1 Zielsetzung	7
1.4.2 Zeilenweise Elimination	7
1.4.3 Erster Eliminationsschritt	7
1.4.4 Zweiter Eliminationsschritt	8
1.4.5 Dritter Eliminationsschritt	8
1.4.6 Rückwärts-Substitution	9
1.4.7 Beispiel	9
1.5 Speicherung der Teilergebnisse	10
1.5.1 Zielsetzung	10
1.5.2 Faktoren-Tabelle	11
1.6 Matrizeninversion durch Faktorisierung	12
1.6.1 Teilmatrizen	12
1.6.2 Ursprüngliche und invertierte Matrix A	12
1.7 Anwendung auf ein einfaches Netz	13
1.8 Symmetrische Matrix A	15
1.9 Änderungen in der Matrix A	16
1.10 Vergleich	16
1.11 Optimale Ordnung	16
1.11.1 Anforderungen an die optimale Ordnung	16
1.11.2 Ordnungs-Regeln	17
1.11.3 Auswirkung der optimalen Ordnung	18
1.11.4 Vorteile der optimalen Ordnung	18
Aufgaben	19
2 Stationäres Netzmodell	23
2.1 Einleitung	23
2.2 Voraussetzungen	23
2.2.1 Einphasige Darstellung	23
2.2.2 Bezogene Größen	26

2.3	Einphasige, bezogene Darstellung von Drehstromtransformatoren	27
2.3.1	Transformatoren mit Last-Stufenschalter als Längsregler	27
2.3.2	Transformator als Schrägregler	29
2.4	Netzgleichungen	32
2.4.1	Knotenadmittanzmatrix	32
2.4.2	Leistungs-Spannungs-Gleichungen	32
2.4.3	Darstellung der Netzgleichungen in Polarkoordinaten	34
2.4.4	Darstellung der Netzgleichungen in kartesischen Koordinaten	34
2.4.5	Bemerkungen	35
2.5	Klassierung der Knoten	35
2.6	Beispiel	37
2.7	Abschließende Bemerkungen	41
	Aufgaben	42
3	Lastflußberechnung	45
3.1	Einleitung	45
3.2	Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren	46
3.2.1	Lösung einer nichtlinearen Gleichung mit einer Unbekannten	46
3.2.2	Anwendung auf Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten	47
3.3	Lösung der nichtlinearen Netzgleichungen	50
3.3.1	Grundsätzliche Vorgehensweise	50
3.3.2	Spannungsgeregelte Knoten	53
3.4	Beispiel	54
	Aufgaben	58
4	Schnelle, entkoppelte Lastflußberechnung	61
4.1	Einleitung	61
4.2	Kopplung zwischen den Wirk- und Blindleistungsbeziehungen	61
4.3	Stationäres Netzmodell in Polarkoordinaten	63
4.4	Diskussion	67
4.5	Iterationsverfahren	68
4.6	Konvergenzverhalten	70
4.7	Gleichstrom-Lastflußberechnung	71
	Aufgaben	72
5	Bewertung der Lastflußberechnung und Sensitivitätsanalyse	75
5.1	Diskussion der Lastflußergebnisse	75
5.2	Sensitivitätsanalyse der Lastflußgleichungen	78
5.3	Lastfluß-Steuerung mit Regeltransformatoren	80
5.3.1	Querregelung und Wirkfluß-Steuerung	80
5.3.2	Längsregelung und Blindfluß-Steuerung	84
5.3.3	Abschließende Bemerkungen	89
	Aufgaben	89
6	Wirtschaftliche Lastverteilung	93
6.1	Einleitung	93
6.2	Optimale Lastverteilung ohne Berücksichtigung der Netzverluste	94
6.2.1	Definition der Kostenfunktion C	94
6.2.2	Nebenbedingungen	95
6.2.3	Lastverteilung auf zwei Kraftwerk-Einspeisungen	96
6.2.4	Optimale Lastverteilung für den allgemeinen Fall	97

6.2.5	Numerische Berechnung des Optimums	99
6.3	Optimale Lastverteilung unter Berücksichtigung der Netzverluste	99
6.3.1	Optimalitätsbedingung	100
6.3.2	Optimale Lastverteilung für zwei Kraftwerk-Einspeisungen	101
6.3.3	Verallgemeinerung der Optimalitätsbedingungen	103
6.3.4	Numerische Berechnung der optimalen Lastverteilung	107
	Aufgaben	107
7	Symmetrische Kurzschluß-Strom-Berechnung	113
7.1	Einleitung	113
7.2	Kurzschluß-Strom-Berechnung mit Ersatzschaltung	114
7.2.1	Leerlaufender Synchrongenerator	114
7.2.2	Allgemeiner Belastungszustand	115
7.2.3	Synchronmotoren	117
7.3	Satz von THEVENIN	117
7.4	Kurzschluß-Leistung	119
7.5	Digitale Kurzschluß-Strom-Berechnung	120
7.5.1	Problemstellung	120
7.5.2	Netzmodell für symmetrische Fehlerstromberechnungen	121
7.5.3	Berechnung des stationären Netzzustandes	122
7.5.4	Anwendung des THEVENIN-Theorems	123
7.5.5	Überlagerungssatz	124
7.5.6	Verallgemeinerung	126
7.5.7	Digitales Rechenprogramm	127
	Aufgaben	128
8	Unsymmetrische Fehlerstrom-Berechnung	131
8.1	Einleitung	131
8.2	Symmetrische Komponenten	133
8.2.1	Transformation mit symmetrischen Komponenten	133
8.2.2	Leistungsberechnung	134
8.2.3	Netzgleichungen	135
8.3	Ersatzschaltbilder in symmetrischen Komponenten	135
8.3.1	Übertragungselemente	135
8.3.2	Synchronmaschine	137
8.3.3	Drehstromtransformatoren	139
8.4	Anwendungen auf unsymmetrische Fehler	141
8.4.1	Einpoliger Erdkurzschluß	142
8.4.2	Zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung	142
8.4.3	Zweipoliger Kurzschluß mit Erdberührung	144
8.5	Digitale Berechnung	145
8.5.1	Ersatzschaltung des Netzes in symmetrischen Komponenten	145
8.5.2	Zusammenfassung der drei Komponenten-Systeme	146
8.5.3	Satz von THEVENIN	147
8.5.4	Modellierung der Fehlerstelle	148
8.5.5	Bestimmung des Fehlerstromes I_s^f	150
8.5.6	Bestimmung der Fehlermatrizen Y_s^f	152
8.6	Abschließende Bemerkungen	153
	Aufgaben	155

9	State Estimation	157
9.1	Einleitung	157
9.2	Aufgabenstellung	157
9.3	Lineare Estimationsmethode	159
9.3.1	Ein einfaches Beispiel	159
9.3.2	Lineares Meßmodell	161
9.3.3	Lineare Estimationstheorie	162
9.3.4	Anwendung der linearen Estimationstheorie	164
9.4	Anwendung in Energieübertragungssystemen	165
9.4.1	Definition der Systemgrößen	165
9.4.2	Modell des Übertragungselementes	167
9.4.3	Meßmodell	168
9.4.4	Linearisierung des Estimationsalgorithmus	169
9.5	Entdeckung und Lokalisierung großer Meßfehler	173
9.5.1	Bedeutung großer Meßfehler	173
9.5.2	Linearisierte Estimationstheorie	173
9.5.3	Entdeckung großer Meßfehler	174
9.5.4	Lokalisierung großer Meßfehler	175
9.6	Abschließende Bemerkungen	176
	Aufgaben	177
10	Statische Stabilität	179
10.1	Einleitung	179
10.1.1	Begriffe und Definitionen	179
10.1.2	Beschreibung der Stabilitätsuntersuchung	180
10.2	Statische Stabilität einer Kraftwerkeinspeisung	181
10.2.1	Systemaufbau	181
10.2.2	Wirkleistungseinspeisung	182
10.2.3	Statisches Stabilitätskriterium	184
10.3	Grenzeleistung einer Kraftwerkeinspeisung	187
10.3.1	Betriebliche Grenzbedingungen	187
10.3.2	Statische Stabilitätsgrenze und Spannungsbedingungen	188
10.3.3	Kompensation der Übertragungseinrichtung	194
10.4	Statische Stabilität bei zwei Kraftwerkeinspeisungen	196
10.4.1	Systemaufbau	196
10.4.2	Stabilitätskriterium für zwei Einspeisungen	197
10.4.3	Erweiterung des Stabilitätskriteriums	200
	Aufgaben	202
11	Frequenz-Regelung im Inselnetz	205
11.1	Einleitung	205
11.1.1	Problemstellung	205
11.1.2	Leistungsgleichgewicht	206
11.1.3	Zielsetzung	207
11.1.4	Systemaufbau	207
11.2	Kraftwerksmodell	208
11.2.1	Betriebsweise thermischer Kraftwerke	208
11.2.2	Struktur des Mittelzeitmodelles	211
11.3	Netzmodell	214
11.4	Beispiel	217

11.5	Analyse der Primärregelung	220
11.6	Vollständiges Mittelzeitmodell	222
11.7	Sekundärregelung	225
11.7.1	Aufgaben der Sekundärregelung	225
11.7.2	Realisierung der Sekundärregelung	226
	Aufgaben	228
12	Frequenz-Leistungs-Regelung im Verbundnetz	231
12.1	Einleitung	231
12.2	Aufbau des Verbundsystems	231
12.2.1	Struktur des Verbundsystems	231
12.2.2	Wirkleistungsbilanz im Verbundsystem	233
12.2.3	Berechnung der Übergabeleistung	233
12.2.4	Dynamisches Verhalten des Verbundsystems	236
12.3	Aufbau der Netzregelung	239
12.3.1	Mittelzeitmodell	239
12.3.2	Primärregelung	241
12.3.3	Sekundärregelung	243
12.4	Abschließende Bemerkungen	246
	Aufgaben	247
13	Spannungs-Regelung	249
13.1	Einleitung	249
13.2	Vereinfachte Darstellung der Spannungs-Regelung	250
13.3	Struktur der Spannungs-Regelung	252
13.4	Simulation der Spannungs-Regelung	254
13.4.1	Modellierung	254
13.4.2	Stabilitätsuntersuchung	255
13.4.3	Stabilisierungsmaßnahmen	257
	Aufgaben	259
14	Transiente Stabilität	261
14.1	Einleitung	261
14.2	Einfaches, dynamisches Modell der Synchronmaschine	262
14.2.1	Vereinfachungen	262
14.2.2	Schwingungsgleichung des Synchrongenerators	264
14.2.3	Transiente Turbinenleistung	266
14.2.4	Transiente Generatorleistung	266
14.3	Lösung der Schwingungsgleichung	270
14.3.1	Kleine Störungen	271
14.3.2	Große Störungen	272
14.4	Direkte Stabilitätsuntersuchung	274
14.5	Numerische Integration	277
14.5.1	Einleitung	277
14.5.2	Klassierung der numerischen Verfahren	278
14.5.3	EULER-Verfahren	279
14.6	Transiente Stabilitätsuntersuchungen	280
14.6.1	Systembeschreibung	280
14.6.2	Störungskatalog	282
14.6.3	Transientes Kurzzeitmodell	282

14.7	Verallgemeinertes Kurzzeitmodell	287
14.8	Abschließende Bemerkungen	290
	Aufgaben	290
Schrifttum		292
Stichwortverzeichnis		293

1 Anwendung der Matrizenrechnung

1.1 Begriffe, Definitionen und Notation

Die stationäre Berechnung elektrischer Energieübertragungssysteme kann auf den Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen zurückgeführt werden. Setzt man dabei Linearität voraus, so läßt sich dafür ein lineares Gleichungssystem aufstellen, das folgende allgemeine Form hat

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1.1-1)$$

Die Koeffizienten a_{ij} lassen sich in ein geordnetes Schema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1-2)$$

schreiben. Diese Darstellung nennt man Matrizendarstellung. Eine Matrix wird stets durch einen Fettdruck-Buchstaben gekennzeichnet. Die Elemente der Matrix A sind die Koeffizienten a_{ij} , wobei der Index i die Zeilennummer und der Index j die Spaltennummer angibt.

Für die stationäre Berechnung von Energieübertragungssystemen kann den Elementen a_{ij} eine physikalische Interpretation gegeben werden. Dies wird im zweiten Kapitel beim Aufstellen von Netzmodellen näher ausgeführt. Dabei wird gezeigt, daß die Matrix A z. B. eine Knotenadmittanzmatrix sein kann. Die Koeffizienten a_{ij} einer solchen Matrix können aus reellen, imaginären oder komplexen Zahlen bestehen. Wertmäßig sind sie durch die Admittanzen der die Netzknoten verbindenden Elemente gegeben. Von ganz besonderer Bedeutung für die numerische Netzberechnung ist die Tatsache, daß in diesem Fall die meisten Koeffizienten $a_{ij} = 0$ sind. Man nennt dann die Matrix A eine schwach besetzte Matrix. Auf die Behandlung solcher Matrizen wird in Abschnitt 1.6 eingegangen.

Die Matrix A in Gl. (1.1-2) hat m Zeilen und n Spalten. Man schreibt deshalb für die Dimension der Matrix A

$$\dim A = (m, n) \quad (1.1-3)$$

Für den Spezialfall $m = n$ hat man es mit quadratischen Matrizen zu tun. Jeder quadratischen Matrix kann man eine Zahl, ihre Determinante

$$\det A = a \quad (1.1-4)$$

zuordnen. Eine Matrix A ist symmetrisch, wenn die Koeffizienten a_{ij} und a_{ji} die Bedingung

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (1.1-5)$$

erfüllen. Sie heißt schief-symmetrisch, wenn anstelle von Gl. (1.1-5) die Beziehung gilt

$$a_{ij} = -a_{ji} . \quad (1.1-6)$$

Eine Matrix A heißt regulär, wenn

$$\det A \neq 0 \quad (1.1-7)$$

erfüllt ist. Anderenfalls bei

$$\det A = 0 \quad (1.1-8)$$

nennt man sie singulär.

Eine Matrix, die nur aus einer Spalte oder einer Zeile besteht, nennt man Vektor. Ein Zeilenvektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile; d. h. gemäß Gl. (1.1-3) ist die Dimension gleich $(1, n)$. Ein Spaltenvektor ist eine Matrix mit nur einer Spalte; d. h. der Dimensionsbereich ist $(m, 1)$. Vektoren werden durch kleine, Fettdruck-Buchstaben gekennzeichnet, z. B. x oder b usw.

Die folgenden Beispiele sollen diese Definitionen verdeutlichen.

(3,3) dimensionale Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \det A = -15$$

(3,2) dimensionale Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

(4,1) dimensionale Matrix
Spaltenvektor

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1,3) dimensionale Matrix
Zeilenvektor

$$x = [4 \quad -5 \quad 0]$$

(3,3) dimensionale Einheitsmatrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3,3) dimensionale symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Für die weiteren Überlegungen ist der Begriff der Dreiecksmatrix von großer Bedeutung. Die obere Dreiecksmatrix ∇ ist so definiert, daß alle Elemente unterhalb der Diagonale, die durch die Elemente a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$, gebildet werden, gleich Null sind. Somit gilt z. B. für eine (3,3) dimensionale obere Dreiecksmatrix

$$\nabla = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.1-9)$$

Entsprechend sind bei der unteren Dreiecksmatrix Δ alle Elemente oberhalb der Diagonale gleich Null; d. h.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.1-10)$$

Beide Dreiecksmatrizen sind spezielle, quadratische Matrizen. Im weiteren werden die Matrizen Elemente, die gleich Null sind, durch leere Felder dargestellt.

Eine zu A transponierte Matrix, die durch A^T gekennzeichnet wird, erhält man durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von A so, daß jede Zeile i von A zur Spalte i von A^T wird; d. h.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \quad (1.1-11)$$

Die konjugiert komplexe Matrix A^* einer komplexen Matrix A erhält man dadurch, daß jedes komplexe Element $\bar{a}_{ij}$, das durch Überstreichen als komplexes Element gekennzeichnet wird, durch seinen konjugiert-komplexen Wert $\bar{a}_{ij}^*$ ersetzt wird

$$A = \begin{bmatrix} 2 + j3 & -j5 \\ -j5 & 6 - j7 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 2 - j3 & j5 \\ j5 & 6 + j7 \end{bmatrix}. \quad (1.1-12)$$

Die zur quadratischen Matrix A inverse Matrix A^{-1} erfüllt die Eigenschaft

$$AA^{-1} = I. \quad (1.1-13)$$

Zu einer singulären Matrix A existiert keine inverse Matrix. Die direkte Berechnung der inversen Matrix A^{-1} wird hier als bekannt vorausgesetzt.

1.2 Matrizenbeziehungen

Es sei hier zunächst darauf hingewiesen, daß in diesem Kapitel die Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Transponierung und Inversion als bekannt vorausgesetzt werden. Immerhin sind die folgenden Beziehungen besonders wichtig, so daß sie hier zusammengestellt werden. Für ein Matrizenprodukt gilt

$$(AB)^T = B^T A^T . \quad (1.2-1)$$

Die Matrix A heißt orthogonal, falls

$$A^T A = I \quad (1.2-2)$$

erfüllt ist, wobei I gleich der Einheitsmatrix ist. Die Inversion des Produktes zweier Matrizen A und B ist gleich dem Produkt der invertierten Matrix B mit der invertierten Matrix A

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} . \quad (1.2-3)$$

Eine quadratische Matrix, die durch auf der Diagonale angeordnete Teilmatrizen definiert ist, kann dadurch invertiert werden, daß die einzelnen Teilmatrizen invertiert werden

$$\begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{bmatrix} . \quad (1.2-4)$$

1.3 Lineare Gleichungssysteme

Die Matrizenrechnung spielt für die stationäre Berechnung von Energieübertragungssystemen eine ganz wichtige Rolle. Interpretiert man die Matrix A in Gl. (1.1-2) als Knotenadmittanzmatrix, so lassen sich die Werte x_i in Gl. (1.1-1) als die Knotenspannungen und die Werte b_j in Gl. (1.1-1) als die Knotenströme interpretieren. Mit der zuvor definierten Matrizenschreibweise lautet der lineare Zusammenhang zwischen den Knotenspannungen und -strömen

$$Ax = b . \quad (1.3-1)$$

Nimmt man an, daß die Knotenströme bekannt sind, so besteht die Netzberechnung darin, das lineare Gleichungssystem (1.3-1) nach den unbekannten Knotenspannungen x aufzulösen. Dazu benötigt man die Bedingung $\det A \neq 0$ gemäß Gl. (1.1-7) und kann dann formal die Lösung

$$x = A^{-1} b \quad (1.3-2)$$

hinschreiben. Für die effiziente Netzberechnung ist der Bestimmung der inversen Matrix A^{-1} große Aufmerksamkeit zu schenken. Weitere Ausführungen dazu folgen in Abschnitt 1.4.

1.3.1 Homogenes Gleichungssystem

Das inhomogene Gleichungssystem (1.3-1) wird zum homogenen Gleichungssystem, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ist. Mit der obigen Bedingung $\det \mathbf{A} \neq 0$ folgt sofort die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In diesem Fall sind jedoch die nichttrivialen Lösungen von Interesse, bei denen mindestens eine Unbekannte $x_i \neq 0$ ist. Deshalb muß für eine nichttriviale Lösung $\det \mathbf{A} = 0$ sein; d. h. eine oder mehrere Zeilen in der Matrix $\mathbf{A}$ sind voneinander linear abhängig. Man kann jedoch eine Unterdeterminante der Dimension r ($r = \text{Rang der Matrix}$) finden, die nicht verschwindet. Die anderen Gleichungen sind von diesen Ranggleichungen linear abhängig, und es bleiben r Gleichungen mit n Unbekannten übrig. Als Beispiel soll beim homogenen Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.3-3)$$

die Teilmatrix $\mathbf{A}_{11}$ eine nichtverschwindende Determinante haben; d. h. $\det \mathbf{A}_{11} \neq 0$. Dann läßt sich Gl. (1.3-3) wie folgt umschreiben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.3-4)$$

Dabei gilt bezüglich der Dimensionen: $\dim \mathbf{A}_{11} = (r, r)$; $\dim \mathbf{A}_{12} = (r, n-r)$; $\dim \mathbf{x}_1 = r$ $\dim \mathbf{x}_2 = n-r$. Für die erste Zeile erhält man durch Ausmultiplikation

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \quad (1.3-5)$$

oder nach $\mathbf{x}_1$ aufgelöst

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2. \quad (1.3-6)$$

Die r Unbekannten in $\mathbf{x}_1$ sind somit von den restlichen $(n-r)$ Unbekannten in $\mathbf{x}_2$ abhängig. Die Variablen in $\mathbf{x}_2$ können frei gewählt werden.

1.3.2 Konzept der Dreiecksfaktorisierung

Ein lineares Gleichungssystem kann durch elementare Zeilen-Operationen gelöst werden. Das Ziel dieser Operationen besteht darin, die Matrix $\mathbf{A}$ in eine obere Dreiecksmatrix ∇ zu überführen, um dann durch Rückwärts-Substitution die gesuchte Lösung $\mathbf{x}$ bestimmen zu können. Sofern jede Zeilen-Operation sowohl auf die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ als auch auf das zugehörige Element des Vektors $\mathbf{b}$ ausgeübt wird, hat das neue Gleichungssystem der Form

$$\nabla \mathbf{x} = \mathbf{b}' \quad (1.3-7)$$

die gleiche Lösung wie das ursprüngliche Gleichungssystem. Das folgende Beispiel mag dies verdeutlichen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} . \quad (1.3-8)$$

Zunächst wird die Matrix A um den Spaltenvektor b erweitert; d. h.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \quad (1.3-9)$$

Führt man nun die Zeilen-Operation $Z_3 - 3Z_1$ aus (d. h. die erste Zeile wird mit drei multipliziert und anschließend von der dritten Zeile subtrahiert), so erhält man mit dem Teilergebnis und der weiteren Operation $Z_3 + (5/6)Z_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_3 + \frac{5}{6}Z_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{25}{3} \end{bmatrix} . \quad (1.3-10)$$

Damit lautet das Gleichungssystem (1.3-8)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -\frac{25}{6} \end{bmatrix} . \quad (1.3-11)$$

Durch Auflösen von der dritten Zeile her nach x_3 erhält man $x_3 = 25/2$. Aus der zweiten Zeile kann nun nach x_2 aufgelöst werden und man erhält

$$x_2 = \frac{1}{6}(1 - 2x_3) = \frac{1}{6}(1 - 25) = -4 . \quad (1.3-12)$$

Schließlich erhält man aus der ersten Zeile für x_1

$$x_1 = 3 - 3x_2 - x_3 = 3 + 12 - \frac{25}{2} = \frac{5}{2} . \quad (1.3-13)$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses kann durch Einsetzen überprüft werden.

1.3.3 Erweiterung

Bei Netzberechnungen ist die Zahl der zu bestimmenden Knotenspannungen im allgemeinen sehr groß, z. B. $\dim x = 200 \cdots 1000$. Deshalb muß die anhand des obigen Beispiels gezeigte Vorgehensweise systematisiert werden. Um die Faktorisierung großer Matrizen mit Hilfe des Digitalrechners effektiv durchführen zu können, ist ferner die Tatsache zu berücksichtigen, daß die Matrix A schwach besetzt ist. Um beide Forderungen erfüllen zu können, wird die direkte Inversion der Matrix A durch folgende zwei Schritte ersetzt:

1. Dreiecksfaktorisierung mit der Gauß-Elimination und Abspeicherung der Teilergebnisse; siehe Abschnitte 1.4 bis 1.6.
2. Optimale Anordnung der Koeffizienten A so, daß die Schwachbesetztheit durch die Faktorisierung nicht zerstört wird; siehe Abschnitt 1.11.

1.4 Dreiecksfaktorisierung

1.4.1 Zielsetzung

Die Dreiecksfaktorisierung läßt sich auf jede nichtsinguläre Matrix A (reell, komplex, symmetrisch oder unsymmetrisch) anwenden. Das grundsätzliche Vorgehen wird zunächst anhand einer vollbesetzten, unsymmetrischen Matrix A vorgestellt. Die Zielsetzung der Faktorisierung ist bereits in Abschnitt 1.3 mit einem einfachen Beispiel deutlich gemacht worden. Das ursprüngliche Gleichungssystem der Form (1.3-1) soll in eine obere Dreiecksform (1.3-7) überführt werden, das dann anschließend von unten her mit x_n beginnend durch Rückwärts-Substitution unmittelbar aufgelöst werden kann.

1.4.2 Zeilenweise Elimination

Bei der Dreiecksfaktorisierung einer Matrix A mit Hilfe der Gauß-Elimination werden üblicherweise die Elemente unterhalb der Diagonale in aufeinanderfolgenden Spalten eliminiert. Für schwach besetzte Matrizen der Netzberechnung zeigt sich in der Praxis, daß die schrittweise Elimination von Zeilen effizienter ist.

Für die Faktorisierung wird die Matrix A um den Spaltenvektor b wie folgt erweitert

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} . \quad (1.4-1)$$

Im nächsten Abschnitt wird nun gezeigt, wie die einzelnen Eliminationsschritte durchgeführt werden und darauf aufbauend eine allgemeine Faktoren-Tabelle erstellt werden kann. Der Einsatz der Faktoren-Tabelle für die Lösung eines beliebigen Gleichungssystems wird daran anschließend erklärt.

1.4.3 Erster Eliminationsschritt

Im ersten Schritt sind alle Elemente der ersten Zeile durch a_{11} (das Pivot-Element) zu dividieren, so daß das erste Element $a_{11}^{(1)} = 1$ wird. Die übrigen Elemente a_{1j} der ersten Zeile sind wie folgt zu bestimmen

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j}/a_{11} \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, n \\ b_1^{(1)} &= b_1/a_{11} \end{aligned} \quad (1.4-2)$$

Der hochgestellte Index in Klammern gibt den Schritt des Eliminationsverfahrens an.

1.4.4 Zweiter Eliminationsschritt

Im zweiten Schritt ist a_{21} aus der zweiten Zeile durch lineare Kombination mit den in Gl. (1.4-2) berechneten Koeffizienten der ersten Zeile zu eliminieren. Ferner muß das Diagonalelement $a_{22}^{(2)} = 1$ werden. Dadurch geht das Koeffizientenschema $A\mathbf{b}$ in die Form über

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} . \quad (1.4-3)$$

Aufgrund der ersten Forderung muß die erste Zeile (1.4-3) mit $-a_{21}$ multipliziert und zur zweiten Zeile von (1.4-1) addiert werden. Anschließend ist die gesamte Zeile durch das Pivot-Element $a_{22}^{(1)}$ zu dividieren, um auf der Diagonale der zweiten Zeile den Wert eins zu erhalten.

Formelmäßig sind somit folgende Rechnungen auszuführen. Die Linearkombination zur Erfüllung der Forderung $a_{21}^{(2)} = 0$ lautet

$$\begin{aligned} a_{2j}^{(1)} &= a_{2j} - a_{21}a_{1j}^{(1)} \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, n \\ b_2^{(1)} &= b_2 - a_{21}b_1^{(1)} . \end{aligned} \quad (1.4-4)$$

Für die Berechnung des Einheits-Diagonal-Elementes gilt schließlich

$$\begin{aligned} a_{2j}^{(2)} &= a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \quad \text{für } j = 3, 4, \dots, n \\ b_2^{(2)} &= b_2^{(1)} / a_{22}^{(1)} . \end{aligned} \quad (1.4-5)$$

1.4.5 Dritter Eliminationsschritt

Im dritten Schritt sind die Elemente in der dritten Zeile links vom Diagonalelement zu eliminieren und das dritte Diagonalelement zu eins zu berechnen. Nach dem dritten Schritt erhält man somit folgende Form

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} . \quad (1.4-6)$$

Die Linearkombination zur Elimination des Elementes a_{31} besteht aus der Multiplikation der ersten Zeile in Gl. (1.4-3) mit $-a_{31}$ und Addition zur dritten Zeile in Gl. (1.4-1)

$$\begin{aligned} a_{3j}^{(1)} &= a_{3j} - a_{31}a_{1j}^{(1)} \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, n \\ b_3^{(1)} &= b_3 - a_{31}b_1^{(1)} \end{aligned} \quad (1.4-7)$$

In der Linearkombination zur Elimination des Elementes a_{32} wird zunächst die zweite Zeile in Gl. (1.4-3) mit $-a_{32}^{(1)}$ multipliziert und zur soeben modifizierten dritten Zeile addiert

$$\begin{aligned} a_{3j}^{(2)} &= a_{3j}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{2j}^{(2)} \quad \text{für } j = 3, 4, \dots, n \\ b_3^{(2)} &= b_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_2^{(2)} \end{aligned} \quad (1.4-8)$$

Für die Berechnung des Einheits-Diagonalelementes $a_{33}^{(3)} = 1$ muß die in Gl. (1.4-8) berechnete dritte Zeile insgesamt noch durch $a_{33}^{(2)}$ dividiert werden

$$\begin{aligned} a_{3j}^{(3)} &= a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)} \quad \text{für } j = 4, 5, \dots, n \\ b_3^{(3)} &= b_3^{(2)} / a_{33}^{(2)} \end{aligned} \quad (1.4-9)$$

Durch schrittweises Weiterführen dieses Verfahrens bis zur letzten Zeile der ursprünglichen Matrix A erhält man schließlich folgendes Koeffizienten-Schema

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.4-10)$$

Bezeichnet man nun die linke in Gl. (1.4-10) angegebene Teilmatrix als obere Dreiecksmatrix ∇ , so lautet das faktorisierte Gleichungssystem nun

$$\nabla x = b' \quad (1.4-11)$$

Die obere Dreiecksmatrix ∇ ist durch die n ersten Spalten in Gl. (1.4-10) und b' ist durch die letzte Spalte in Gl. (1.4-10) definiert.

1.4.6 Rückwärts-Substitution

Die gesuchte Lösung des Gleichungssystems (1.3-1) kann nun direkt durch Rückwärts-Substitution des Gleichungssystems (1.4-11) bestimmt werden, indem man mit der letzten Zeile in Gl. (1.4-11) beginnt und sich schrittweise nach oben durcharbeitet unter Verwendung der folgenden Beziehungen

$$x_n = b_n^{(n)} \quad (1.4-12)$$

$$x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n \quad (1.4-13)$$

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \quad \text{für } i = n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1 \quad (1.4-14)$$

1.4.7 Beispiel

An Hand der Matrix A ist die oben behandelte Faktorisierung numerisch durchzuführen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} . \quad (1.4-15)$$

Dieses Beispiel ist bereits in Abschnitt 1.3.2 benutzt worden.

Dabei ist die rechte Seite des Gleichungssystems durch den Vektor b vorgegeben. Da in diesem Beispiel das Matrizenelement $a_{11} = 1$ ist, wird die erste Zeile durch den ersten Eliminationsschritt nach Gl. (1.4-2) nicht verändert. Im zweiten Eliminationsschritt nach Gl. (1.4-4) und (1.4-5) ergibt sich folgendes Ergebnis

$$a_{22}^{(1)} = 6 \quad a_{23}^{(1)} = 2 \quad b_2^{(1)} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

Der dritte Eliminationsschritt nach Gl. (1.4-7) bis (1.4-9) ergibt

$$a_{32}^{(1)} = 4 - 9 = -5 \quad a_{33}^{(1)} = 1 - 3 = -2 \quad b_3^{(1)} = 4 - 9 = -5$$

$$a_{33}^{(2)} = -2 - (-5)(1/3) = -1/3 \quad b_3^{(2)} = -5 - (-5)(1/6) = -25/6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 25/2 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt unmittelbar durch Rückwärts-Substitution die bereits bekannte Lösung

$$x_3 = 25/2 \quad x_2 = 1/6 - x_3/3 = -4 \quad x_1 = 3 - 3x_2 - x_3 = 5/2 . \quad (1.4-16)$$

1.5 Speicherung der Teilergebnisse

1.5.1 Zielsetzung

Die Dreiecksfaktorisierung in Abschnitt 1.4 zeigt, daß sich die Rechenschritte stets einerseits auf die ursprüngliche Matrix A und andererseits auf den Vektor b beziehen. In zahlreichen Fällen der praktischen Netzberechnung entstehen lineare Gleichungssysteme der Form (1.3-1) durch Linearisierung eines nichtlinearen Zusammenhanges. Um die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems bestimmen zu können, muß das linearisierte Gleichungssystem iterativ mehrmals gelöst werden. Dabei bleibt sehr oft die Matrix A konstant, lediglich die rechte Seite b ändert sich von Iterationsschritt zu Iterationsschritt. Dies bedeutet für die Netzberechnung, daß sich die Knotenströme bei unveränderter Netztopologie ändern; d. h. Änderung des Betriebszustandes.

Betrachtet man nun die Berechnung des modifizierten Vektors b' mit den Gln. (1.4-4) bis (1.4-10), so fällt auf, daß eine Reihe von Zwischenergebnissen gespeichert werden muß, wenn die Dreiecksfaktorisierung nicht nach jeder Änderung von b neu durchge-

führt werden soll. Als Beispiel wird die Berechnung von $b_3^{(3)}$ betrachtet. Dazu braucht man die Größen $a_{33}^{(2)}$ und $a_{32}^{(1)}$. Die Koeffizienten findet man zunächst nicht im Lösungsschema Gl. (1.4-10). Deshalb wird im folgenden gezeigt, welche wichtigen Teilergebnisse wie abgespeichert werden können.

1.5.2 Faktoren-Tabelle

Da es nicht erforderlich ist, die Werte Null und Eins in Gl. (1.4-10) abzuspeichern, sind an diesen Stellen die Teilergebnisse der Faktorisierung nach Abschnitt 1.4 abzuspeichern. Dadurch erhält man folgende Faktoren-Tabelle der Dimension (n, n) . Sie steht an der Stelle der ursprünglichen Matrix A .

$$\begin{array}{ccccccc} d_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & \\ u_{21} & d_{22} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & \\ u_{31} & u_{32} & d_{33} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & & \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & d_{nn} & & \end{array} \quad (1.5-1)$$

Die Elemente $a_{ij}^{(i)}$ oberhalb der Diagonale stellen das Endergebnis der Faktorisierung gemäß Gl. (1.4-10) dar. Es sind die Elemente der oberen Dreiecksmatrix ∇ in Gl. (1.4-11). Es gilt immer $i < j$.

Die Diagonalelemente d_{ii} sind durch die Faktorisierungsschritte Gl. (1.4-2) bis (1.4-9) für die ersten drei Werte ausführlich definiert worden. Allgemein gilt

$$d_{ii} = 1/a_{ii}^{(i-1)} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5-2)$$

Dabei entspricht der Wert $a_{11}^{(0)}$ dem Wert a_{11} . Die Werte nach Gl. (1.5-2) werden für die Berechnung von b' benötigt.

Die Elemente u_{ij} in Gl. (1.5-1) unterhalb der Diagonale sind Teilergebnisse, die ebenfalls für die erneute Berechnung von b' erforderlich sind, falls sich nur b' und nicht auch A ändert. Entsprechend den Gln. (1.4-7) bis (1.4-9) benötigt man dabei die Koeffizienten

$$u_{ij} = a_{ij}^{(j-1)} \quad \text{mit } i > j. \quad (1.5-3)$$

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß in der Faktoren-Tabelle (1.5-1) die Matrix-Klammern bewußt weggelassen worden sind. Dadurch soll deutlich gemacht werden, daß es sich hier um eine reine Anordnung von Faktoren handelt und nicht um eine Matrix im Sinne der bisher benutzten Definition.

Beispiel

In dem bereits durchgeführten dreidimensionalen Beispiel kann die Faktoren-Tabelle (1.5-1) aufgrund der Zwischenergebnisse sofort angegeben werden. Sie lautet

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 3 & -5 & -3 \end{array}$$

führt werden soll. Als Beispiel wird die Berechnung von $b_3^{(3)}$ betrachtet. Dazu braucht man die Größen $a_{33}^{(2)}$ und $a_{32}^{(1)}$. Die Koeffizienten findet man zunächst nicht im Lösungsschema Gl. (1.4-10). Deshalb wird im folgenden gezeigt, welche wichtigen Teilergebnisse wie abgespeichert werden können.

1.5.2 Faktoren-Tabelle

Da es nicht erforderlich ist, die Werte Null und Eins in Gl. (1.4-10) abzuspeichern, sind an diesen Stellen die Teilergebnisse der Faktorisierung nach Abschnitt 1.4 abzuspeichern. Dadurch erhält man folgende Faktoren-Tabelle der Dimension (n, n) . Sie steht an der Stelle der ursprünglichen Matrix A .

$$\begin{array}{ccccccc}
 d_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & \\
 u_{21} & d_{22} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & \\
 u_{31} & u_{32} & d_{33} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & & \\
 \vdots & & & & \vdots & & \\
 u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & d_{nn} & &
 \end{array} \quad (1.5-1)$$

Die Elemente $a_{ij}^{(i)}$ oberhalb der Diagonale stellen das Endergebnis der Faktorisierung gemäß Gl. (1.4-10) dar. Es sind die Elemente der oberen Dreiecksmatrix ∇ in Gl. (1.4-11). Es gilt immer $i < j$.

Die Diagonalelemente d_{ii} sind durch die Faktorisierungsschritte Gl. (1.4-2) bis (1.4-9) für die ersten drei Werte ausführlich definiert worden. Allgemein gilt

$$d_{ii} = 1/a_{ii}^{(i-1)} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5-2)$$

Dabei entspricht der Wert $a_{11}^{(0)}$ dem Wert a_{11} . Die Werte nach Gl. (1.5-2) werden für die Berechnung von b' benötigt.

Die Elemente u_{ij} in Gl. (1.5-1) unterhalb der Diagonale sind Teilergebnisse, die ebenfalls für die erneute Berechnung von b' erforderlich sind, falls sich nur b' und nicht auch A ändert. Entsprechend den Gln. (1.4-7) bis (1.4-9) benötigt man dabei die Koeffizienten

$$u_{ij} = a_{ij}^{(j-1)} \quad \text{mit } i > j. \quad (1.5-3)$$

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß in der Faktoren-Tabelle (1.5-1) die Matrix-Klammern bewußt weggelassen worden sind. Dadurch soll deutlich gemacht werden, daß es sich hier um eine reine Anordnung von Faktoren handelt und nicht um eine Matrix im Sinne der bisher benutzten Definition.

Beispiel

In dem bereits durchgeführten dreidimensionalen Beispiel kann die Faktoren-Tabelle (1.5-1) aufgrund der Zwischenergebnisse sofort angegeben werden. Sie lautet

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 3 & 1 \\
 0 & 1/6 & 1/3 \\
 3 & -5 & -3
 \end{array}$$

1.6 Matrizeninversion durch Faktorisierung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie mit Hilfe der Faktoren-Tabelle (1.5-1) die inverse Matrix A^{-1} berechnet wird und damit die Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems (1.3-1) gefunden werden kann. Dazu werden mit der Faktoren-Tabelle folgende drei nichtsinguläre Matrizen gebildet. Sie unterscheiden sich von Einheitsmatrizen nur durch die im einzelnen angegebenen i -ten Zeilen und Spalten.

1.6.1 Teilmatrizen

Man definiert die Diagonalmatrizen D_i mit der i -ten Zeile gemäß

$$[0, 0, \dots, d_{ii}, 0, 0, \dots, 0] , \quad (1.6-1)$$

wobei d_{ii} aus der Faktoren-Tabelle (1.5-1) entnommen wird. Insgesamt gibt es n solcher Diagonalmatrizen mit dem i -ten Diagonalelement ungleich eins; d. h. $d_{jj} = 1$ für $j \neq i$.

Die unteren Dreiecksmatrizen Δ_i mit der i -ten Spalte gemäß

$$[0, 0, \dots, 1, -u_{i+1,i}, -u_{i+2,i}, \dots, -u_{n-1,i}, -u_{n,i}]^T , \quad (1.6-2)$$

wobei die u_{ij} mit $i > j$, aus der unteren Hälfte der Faktoren-Tabelle (1.5-1) entnommen werden. Insgesamt gibt es $n-1$ solcher unterer Dreiecksmatrizen mit jeweils einer Spalte gemäß Gl. (1.6-2). Die übrigen Diagonalelemente sind gleich eins.

Die oberen Dreiecksmatrizen ∇_i mit der i -ten Zeile gemäß

$$[0, 0, \dots, 1, -a_{i,i+1}^{(i)}, -a_{i,i+2}^{(i)}, \dots, -a_{i,n-1}^{(i)}, -a_{i,n}^{(i)}] , \quad (1.6-3)$$

wobei die $a_{ij}^{(i)}$, mit $i < j$, aus der oberen Hälfte der Faktoren-Tabelle (1.5-1) entnommen werden. Insgesamt gibt es $n-1$ solcher oberen Dreiecksmatrizen mit jeweils einer Zeile gemäß Gl. (1.6-3). Die übrigen Diagonalelemente sind gleich eins.

Die Berechnung der Inversen dieser drei Matrizentypen, d. h. D_i^{-1} , Δ_i^{-1} und ∇_i^{-1} , ist sehr einfach. D_i^{-1} berechnet sich aus den Reziprokwerten der Diagonalelemente; bei den oberen und unteren Dreiecksmatrizen erhält man die inversen Matrizen dadurch, daß man bei den Nicht-Diagonalelementen das Vorzeichen umdreht.

1.6.2 Ursprüngliche und invertierte Matrix A

Die inverse Matrix A^{-1} erhält man nun als Produkt der in Gl. (1.6-1) bis (1.6-3) definierten Matrizen, indem gilt

$$\nabla_1 \nabla_2 \cdots \nabla_{n-1} D_n \Delta_{n-1} D_{n-1} \cdots \Delta_2 D_2 \Delta_1 D_1 b = A^{-1} b = x . \quad (1.6-4)$$

Damit hat man gleichzeitig die inverse Matrix A^{-1} sowie die gewünschte Lösung x bestimmt.

Diese Lösung der Matrizen-Inversion erscheint zunächst recht kompliziert. Es ist jedoch daran zu erinnern, daß die Dreiecks- und Diagonalmatrizen in Gl. (1.6-4) sehr einfach aufgebaut sind und für die Auswertung nur einfache Multiplikationen und Additionen benötigen.

Üblicherweise wird der Speicherplatz der Matrix A mit den Werten der Faktoren-Tabelle (1.5-1) überschrieben, um so Speicherplatz sparen zu können. Ein großer, weiterer Vorteil der Inversion mit Faktorisierung besteht darin, daß die ursprüngliche Matrix A aus Gl. (1.6-4) mit Hilfe von Gl. (1.2-3) jederzeit berechnet werden kann. Es gilt

$$D_1^{-1} \Delta_1^{-1} D_2^{-1} \Delta_2^{-1} \cdots \Delta_{n-1}^{-1} D_n^{-1} \nabla_{n-1}^{-1} \nabla_{n-2}^{-1} \cdots \nabla_2^{-1} \nabla_1^{-1} x = Ax = b \quad (1.6-5)$$

Wie bereits erwähnt, sind die inversen Spezialmatrizen in Gl. (1.6-5) sehr leicht zu bestimmen. Die Gl. (1.6-5) erlaubt somit nicht nur die Bestimmung der im Faktorisierungsvorgang überschriebenen Matrix A , sondern bei bekannten x sofort auch die Berechnung der rechten Seite b des Gleichungssystems (1.3-1).

Beispiel

Für das bereits mehrfach benutzte dreidimensionale Beispiel lauten die Spezialmatrizen

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & D_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & D_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \Delta_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ \nabla_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \nabla_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich die inverse Matrix A^{-1} gemäß Gl. (1.6-4) zu

$$A^{-1} = \nabla_1 \nabla_2 D_3 \Delta_2 D_2 \Delta_1 D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5/2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses läßt sich mit Gl. (1.1-13) unmittelbar verifizieren. Ebenso läßt sich Gl. (1.6-5) durch Einsetzen der invertierten Diagonal- und Dreiecksmatrizen verifizieren.

1.7 Anwendung auf ein einfaches Netz

Um den Zusammenhang mit der stationären Netzberechnung an dieser Stelle deutlich zu machen, soll nun die Matrix A als Knotenadmittanzmatrix des in Bild 1.7-1 gezeigten Testnetzwerkes aufgestellt werden. Dazu wird an das Bildungsgesetz der Knotenadmittanzmatrix erinnert:

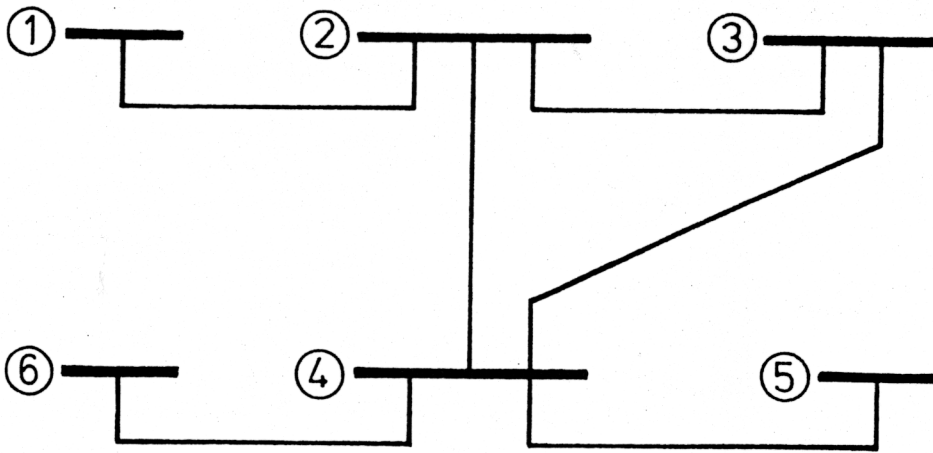


Bild 1.7-1 Testnetzwerk bestehend aus sechs Knoten mit drei Einspeisungen und drei Lasten

- das i -te Diagonalelement a_{ii} ist durch die Summe der vom Knoten i ausgehenden Admittanzen gegeben;
- das Element $a_{ij} = a_{ji}$ mit $i \neq j$ ist durch die negative Admittanz der Verbindung zwischen den Knoten i und j gegeben.

Es wird nun angenommen, daß in den Knoten 1, 2 und 3 je ein Strom $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ und $b_3 = 1$ eingespeist wird. Die übrigen Knotenströme sind durch $b_4 = -1$, $b_5 = -1$ und $b_6 = -1$ gegeben. Gesucht werden die Knotenspannungen $x_1, x_2, \dots, x_6$, wenn angenommen wird, daß die Leitungen einheitlich durch die Admittanzen $Y_{ij} = 1$ beschrieben werden.

Mit dem genannten Bildungsgesetz lautet die symmetrische Knotenadmittanzmatrix A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7-1)$$

Der Stromvektor b ist durch folgende Werte gemäß Aufgabenstellung gegeben

$$b^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1] \quad (1.7-2)$$

Würde man nun das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der (6,6)-dimensionalen Matrix A lösen wollen, so stellt man fest, daß $\det A = 0$ ist; d. h. die Matrix A ist singulär. Dies ist physikalisch dadurch zu erklären, daß zu den Netzgleichungen noch zusätzlich der Energieerhaltungssatz gilt, wonach die zugeführte Energie gleich der verbrauchten Energie ist. Deshalb hat man in einem Netz mit n Knoten nur $n - 1$ linear unabhängige Netzgleichungen. In der Matrix A muß deshalb eine Spalte und eine Zeile gestrichen werden. In diesem Beispiel wird die sechste Spalte und Zeile gestrichen. Dadurch erhält man die Teilmatrix A_5 der Dimension (5,5) sowie das Gleichungssystem $A_5 x_5 = b_5$, wobei auch in x und b das letzte Element jeweils weggelassen wird.

Die Lösung des reduzierten Gleichungssystems ergibt für die gesuchten Knotenspannungen x_5 die Werte

$$x_5^T = [3\frac{2}{3} \quad 2\frac{2}{3} \quad 2\frac{1}{3} \quad 1 \quad 0] . \quad (1.7-3)$$

Durch Einsetzen erhält man schließlich $x_6 = 0$.

1.8 Symmetrische Matrix A

Das obige Beispiel zeigt, daß man es bei Netzberechnungen oft mit symmetrischen Matrizen zu tun hat. Unter dieser Voraussetzung läßt sich das Ergebnis nach Gl. (1.6-4) wesentlich vereinfachen. Der Grund für diese Vereinfachung ist die Beziehung

$$\Delta_i = D_i \nabla_i^T D_i^{-1} . \quad (1.8-1)$$

Damit kann die Matrizeninversion anstelle von Gl. (1.6-4) wie folgt geschrieben werden

$$\nabla_1 \nabla_2 \dots \nabla_{n-2} \nabla_{n-1} D_n D_{n-1} \nabla_{n-1}^T \dots D_2 \nabla_2^T D_1 \nabla_1^T b = A^{-1} b = x . \quad (1.8-2)$$

Benutzt man ferner die kommutative Eigenschaft nach Gl. (1.2-1) eines Matrizenproduktes

$$\nabla_i^T D_j = D_j \nabla_i^T \quad \text{für } i > j , \quad (1.8-3)$$

können folgende drei Matrizenprodukte definiert werden

$$D = D_1 D_2 \dots D_n$$

$$\nabla = \nabla_1 \nabla_2 \dots \nabla_{n-1} . \quad (1.8-4)$$

$$\Delta = \nabla_{n-1}^T \nabla_{n-2}^T \dots \nabla_1^T$$

Damit vereinfacht sich die allgemeine Lösung nach Gl. (1.6-4) zu

$$\nabla D \Delta b = A^{-1} b = x . \quad (1.8-5)$$

Die ursprüngliche Matrix A läßt sich aus den Diagonal- und Dreiecksmatrizen wie folgt berechnen

$$A = (\Delta^T)^{-1} D^{-1} \nabla^{-1} . \quad (1.8-6)$$

Die Symmetrieeigenschaften von A führen zu einer erheblichen Reduktion der für die Faktorisierung erforderlichen Rechenschritte, da die Koeffizienten u_{ij} für $i > j$ in der Faktoren-Tabelle (1.5-1) aus der einfachen Beziehung

$$u_{ij} = a_{ij}^{(j-1)} = a_{jj}^{(j-1)} a_{ji}^{(j)} \quad \text{für } \begin{matrix} i = 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, i-1 \end{matrix} \quad (1.8-7)$$

gewonnen werden können.

1.9 Änderungen in der Matrix A

In praktischen Netzberechnungen ändern sich oft nur einzelne Koeffizienten a_{ij} in der Matrix A . Um nun die Auswirkung auf den Faktorisierungs-Vorgang deutlich zu machen, wird angenommen, daß sich das Element a_{km} ändert. Nun müssen in der Faktoren-Tabelle (1.5-1) folgende Werte geändert werden.

- 1) für $k > m$: die Elemente (i, j) mit $i = k, j \geq m$ und $i > k, j \geq k$;
- 2) für $k \leq m$: die Elemente (i, j) mit $i \geq k, j = m$ und $i \geq m, j > m$.

Aufgrund dieses Zusammenhanges ist im Falle, wo Änderungen in der Matrix A auftreten, darauf zu achten, daß sich die ändernden Elemente möglichst weit unten in A befinden; d. h. falls Leitungselemente geändert werden müssen, so sollen die zugehörigen Knotenindizes möglichst groß sein.

1.10 Vergleich

Vergleicht man die Dreiecksfaktorisierung mit der direkten Matrizeninversion, so gilt folgende Wertung für vollbesetzte Matrizen A . Vorteilhaft bei der Faktorisierung ist die Tatsache, daß die Faktoren-Tabelle (1.5-1) lediglich ein Drittel der direkten Inversions-Operationen benötigt. Beide Verfahren erfordern für die vollständige Lösung die gleiche Anzahl von Rechenoperationen und den gleichen Speicherbedarf. Für die direkte Matrizeninversion spricht die Tatsache, daß sie nur kn Operationen benötigt, wenn nur k Elemente von b ungleich Null sind. Unter gewissen Voraussetzungen ist es möglich, Änderungen in A unmittelbar in A^{-1} zu berücksichtigen, ohne daß eine erneute Inversion erforderlich ist. Dieser Vorteil kann nur dann ausgenutzt werden, wenn die inverse Matrix A^{-1} zur Verfügung steht.

1.11 Optimale Ordnung

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, daß die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe der in Abschnitt 1.4 behandelten Dreiecksfaktorisierung im Vergleich zur direkten Matrizeninversion einige Vorteile bietet, denen aber auch gewisse Nachteile gegenüberstehen. Allerdings überwiegen die Vorteile dann sehr stark, wenn die Matrix A schwach besetzt ist, d. h. nur wenige Elemente $a_{ij} \neq 0$ sind. Dies ist in den meisten Netzberechnungen der Fall. Im folgenden wird gezeigt, wie durch optimale Ordnung der Matrix A eine erhebliche Reduktion des Rechenaufwandes erzielt werden kann.

1.11.1 Anforderungen an die optimale Ordnung

Ziel der optimalen Ordnung ist die Numerierung der Netzknoten und damit der Zeilen und Spalten der Matrix A so, daß bei der Faktorisierung möglichst wenige neue, von Null verschiedene Elemente in der Faktoren-Tabelle (1.5-1) auftreten. Dabei spielt die Wahl des Pivot-Elementes eine wichtige Rolle. Dies wird durch die Zusammenfassung der beiden Gleichungen (1.4-4) und (1.4-5) deutlich

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}^{(1)}} (a_{2j} - a_{21} a_{1j}^{(1)}) . \quad (1.11-1)$$

Nimmt man an, daß das Element a_{2j} vor der Faktorisierung gleich Null ist, so wird für $a_{21} \neq 0$ und $a_{1j}^{(1)} \neq 0$ dieses Element nach dem Eliminationsschritt ungleich Null; d. h. die Schwachbesetztheit der Matrix wird verschlechtert.

Das folgende Beispiel verdeutlicht diesen Zusammenhang, wobei an ein Netzausschnitt mit entsprechendem Besetzungsgrad der Knotenadmittanzmatrix gedacht ist.

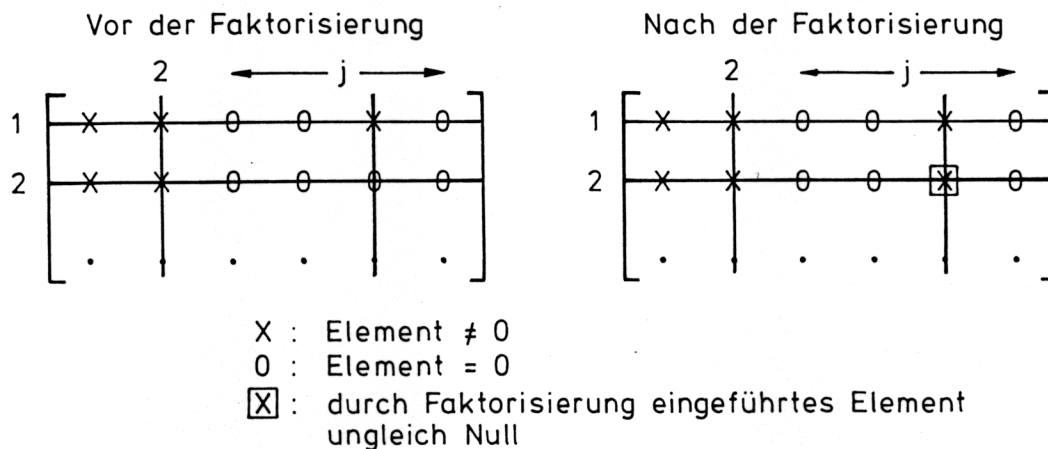


Bild 1.11-1 zeigt die graphische Darstellung des Faktorisierungsschrittes.

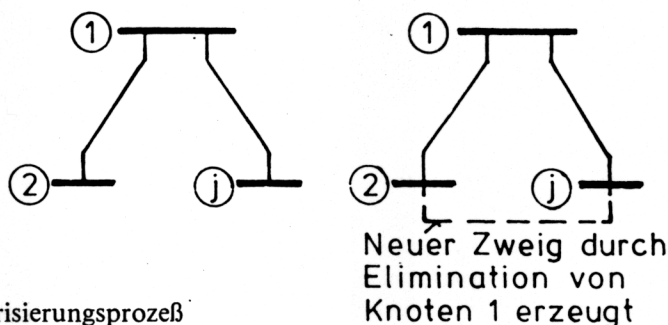


Bild 1.11-1 Elimination von Knoten 1 im Faktorisierungsprozeß

1.11.2 Ordnungs-Regeln

Eine optimale Anordnung der Zeilen einer Matrix A ist praktisch nicht zu bestimmen, denn man müßte dann $n!$ Kombinationen ausprobieren. Vom praktischen Standpunkt genügen im vorliegenden Zusammenhang die folgenden drei Regeln für symmetrische Matrizen:

1. Die Zeilen der Matrix A sind so anzuschreiben, daß die Anzahl der Nichtnull-Elemente mit wachsendem Zeilenindex zunimmt.
2. Der Faktorisierungs-Prozeß ist so zu gestalten, daß immer die Zeilen bearbeitet werden, die während der Durchführung des Faktorisierungsvorganges noch die geringste mögliche Anzahl von Nichtnull-Elementen aufweisen.
3. Bei gleicher Anzahl von Nichtnull-Elementen ist diejenige Zeile zu wählen, bei der im Faktorisierungsprozeß am wenigsten neue Elemente, die ungleich Null sind, entstehen.

1.11.3 Auswirkung der optimalen Ordnung

Die optimale Ordnung zur Faktorisierung symmetrischer Matrizen ist am besten an Hand von Netzwerken, wo die Matrix A als Knotenadmittanzmatrix interpretiert wird, verständlich zu machen. Das folgende, in Bild 1.11-2 gezeigte Netzwerk verdeutlicht den Eliminationsprozeß der Faktorisierung.

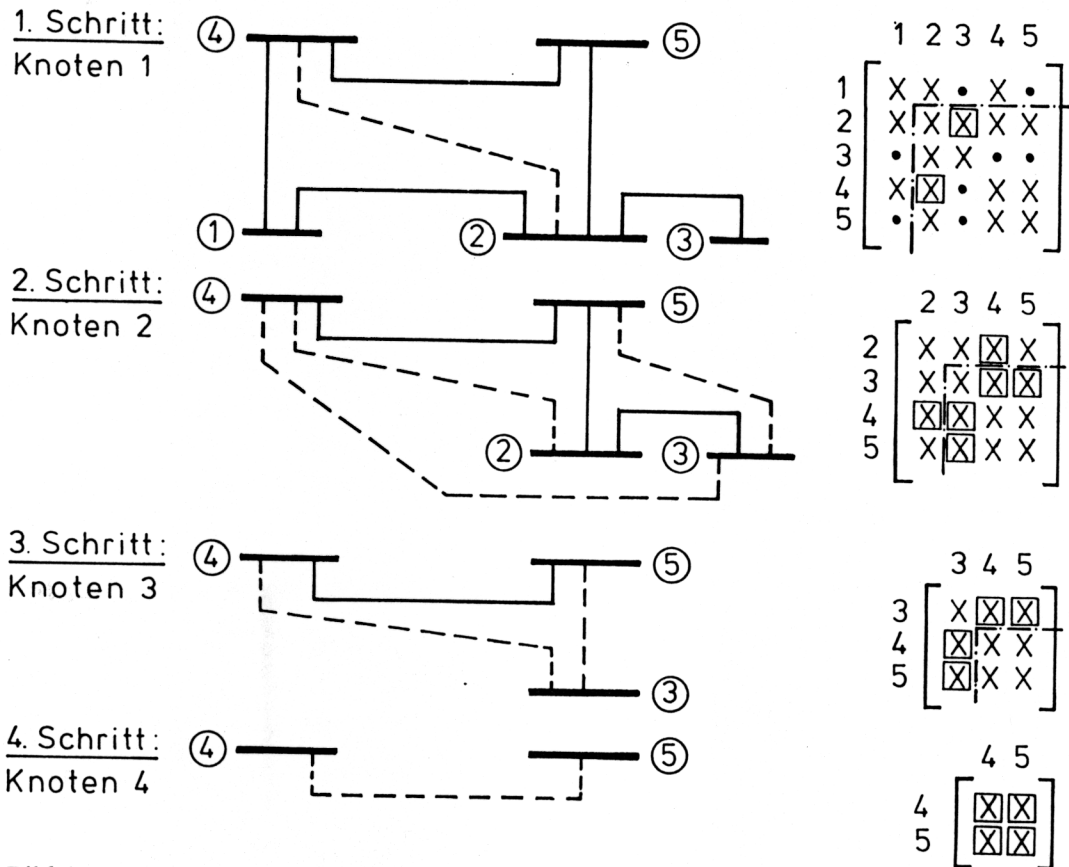


Bild 1.11-2 Fünfknotiges Netzwerk im Eliminationsprozeß

Die gestrichelten Verbindungen zeigen an, welche neuen Zweige durch die Faktorisierung neu eingeführt werden. Dadurch kann gut veranschaulicht werden, daß im Eliminationsprozeß neue Elemente in A eingefügt werden. Mit anderen Worten kann in jedem Faktorisierungsschritt die Elimination eines Netzknotens simuliert werden und die Zahl der dadurch erzeugten neuen Nichtnullelemente festgehalten werden. Ausgehend von dieser Information kann die nächste zu eliminierende Zeile gewählt werden.

Durch die optimale Ordnung der Matrix A kann erreicht werden, daß die Faktorentabelle (1.5-1) höchstens etwa zweimal so viele Nichtnull-Elemente außerhalb der Diagonale aufweist wie die ursprüngliche Matrix A .

1.11.4 Vorteile der optimalen Ordnung

Unter Verwendung der optimalen Ordnung der Matrix A lassen sich folgende wichtige Vorteile der Faktorisierung gegenüber der direkten Inversion festhalten:

1. Die Faktoren-Tabelle kann in einem kleinen Bruchteil der für die Inversion erforderlichen Zeit bestimmt werden.
2. Der Speicherplatzbedarf ist gering.

3. Der Einfluß von Rundungsfehlern wird erheblich reduziert.
4. Modifikationen wegen Änderungen in A lassen sich rasch durchführen.

Demgegenüber ist jedoch auf die erheblich anspruchsvollere Programmierung hinzuweisen. Dieser Nachteil wird jedoch durch die genannten Vorteile vollständig kompensiert.

Zusammenfassend ist festzuhalten, daß die geordnete Dreiecksfaktorisierung für praktische Netzberechnungen, die auf der Lösung eines linearen Gleichungssystems gemäß (1.3-1) beruhen, jeder anderen Berechnungsart auf alle Fälle vorzuziehen ist.

Aufgaben

Aufgabe 1.1

Die wichtige Matrizenbeziehung $(AB)^T = B^T A^T$ ist allgemein zu beweisen.

Aufgabe 1.2

Die speziellen in Abschnitt 1.6 behandelten Dreiecksmatrizen lassen sich besonders einfach durch Vorzeichenwechsel invertieren. Man berechne die Inverse der Matrix, die entsprechend Gl. (1.6-3) definiert ist,

$$\nabla_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und verifiziere das Ergebnis mit Gl. (1.1-13).

Aufgabe 1.3

Für die Matrix A in Abschnitt 1.4.7 ist die Faktoren-Tabelle (1.5-1) in Abschnitt 1.5.2 berechnet worden. Ausgehend von diesem Ergebnis ist die Gültigkeit von Gl. (1.6-5) zu zeigen.

Aufgabe 1.4

Auf die in Abschnitt 1.7 definierte (5,5)-dimensionale Knotenadmittanzmatrix A_5 ist die Dreiecksfaktorisierung anzuwenden, um so

- a) die Lösung für x zu verifizieren,
- b) die Faktoren-Tabelle aufzustellen.

Aufgabe 1.5

Für das im folgenden Bild gezeigte, vierzehnknotige Netzwerk sind die drei Methoden zur optimalen Ordnung schwach besetzter Matrizen entsprechend Abschnitt 1.11.2 anzuwenden. Wie viele neue Nichtnull-Elemente entstehen bei Anwendung der drei Regeln zur optimalen Ordnung?

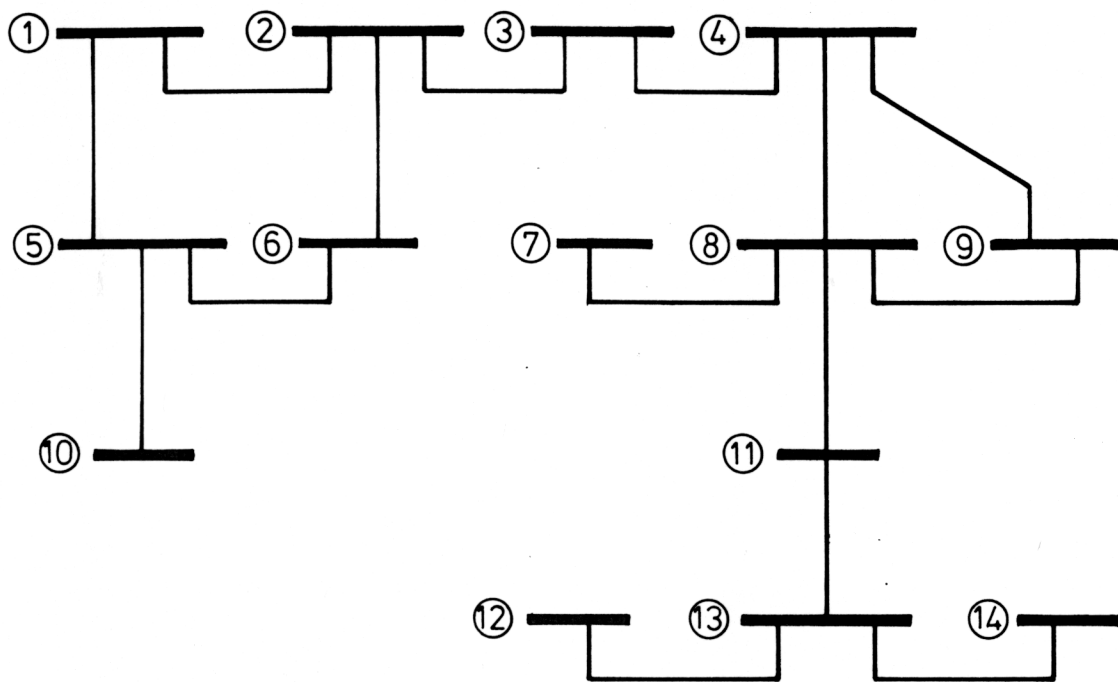


Bild Ü1.5-1 Vierzehnknotiges Netzwerk

2 Stationäres Netzmodell

2.1 Einleitung

Die stationäre, mathematische Modellierung eines elektrischen Energieübertragungssystems ist eine wichtige Voraussetzung für die im Rahmen der Netzplanung und Betriebsführung zu lösenden Aufgaben. Dabei ist natürlich die Annahme, daß sich das System in einem stationären Zustand befindet, nie exakt erfüllt. Das ständige Lastrauschen hält das System stets in einem dynamischen Zustand. Für viele Aufgaben ist es jedoch ausreichend, eine „Momentanaufnahme“ des Betriebszustandes zu machen und dabei die kurzfristigen Ausgleichsvorgänge zu vernachlässigen. Diese Betrachtungsweise ist deshalb gerechtfertigt, weil im Normalbetrieb das Lastrauschen nur eine geringe Amplitude aufweist. Die trendmäßigen Laständerungen erstrecken sich im Normalbetrieb über eine längere Zeit (etliche zehn Minuten). Deshalb vermag das stationäre Lastmodell den momentanen Betriebszustand ausreichend genau zu beschreiben. Mit anderen Worten kann somit der Normalbetriebszustand durch ein System von nichtlinearen, algebraischen Netzgleichungen, die in diesem Kapitel hergeleitet werden, beschrieben werden.

Natürlich können mit diesem Modell keine Ausgleichsvorgänge, wie sie z. B. nach einem größeren Lastsprung oder nach dem Ausfall eines Kraftwerkblockes auftreten, behandelt werden. Erst wenn die zugehörigen dynamischen Vorgänge abgeklungen sind, können die im folgenden behandelten Netzgleichungen für die Berechnung des stationären Betriebszustandes benutzt werden.

Wie lange dann der so errechnete stationäre Betriebszustand gültig bleibt, hängt im Normalbetrieb von der Lastentwicklung ab. Bei raschen Laständerungen (z. B. in der Umgebung der Tageslastspitze) muß die stationäre Lösung häufiger erneut bestimmt werden als zu Zeiten, wo sich die Last nur wenig ändert (z. B. während der Nachtstunden).

2.2 Voraussetzungen

2.2.1 Einphasige Darstellung

Für die stationäre Systemdarstellung reicht es aus, wenn das symmetrisch betriebene Drehstromsystem durch ein einphasiges Wechselstromsystem beschrieben wird. Dementsprechend sind die im folgenden benutzten Spannungen stets Leiter-Erd-Spannungen und die Ströme stets Leiterströme. Da in Drehstromsystemen immer die Nennspannung sowie die gesamte Belastung angegeben wird, muß für die einphasige Betrachtungsweise die verkettete Nennspannung durch $\sqrt{3}$ dividiert und bei der Last nur ein Drittel der Drehstromleistung berücksichtigt werden. Allgemein gilt für Wechselstromgrößen des Leiters a

$$U_a = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{a,3\emptyset} \quad \text{und} \quad S_a = \frac{1}{3} S_{a,3\emptyset} . \quad (2.2-1)$$

Der komplexe Leiterstrom in Leiter a ist dann durch $\bar{I}_a = (\bar{S}_a / \bar{U}_a)^*$ gegeben. Dabei gibt der Index „3 $\emptyset$ “ Nenngrößen des Drehstromsystems an. Strom- und Spannungsgrößen der beiden anderen Leiter lassen sich im normalen Betriebszustand durch Drehung um 120° resp. 240° unmittelbar bestimmen.

Als Beispiel für die einphasige Darstellung wird auf Bild 2.2-1 verwiesen. Die schematische Anlagendarstellung zeigt einen Generator, der über den zugehörigen Blocktransformator und eine Freileitung eine Last versorgt (Bild 2.2-1a). Die dreiphasige

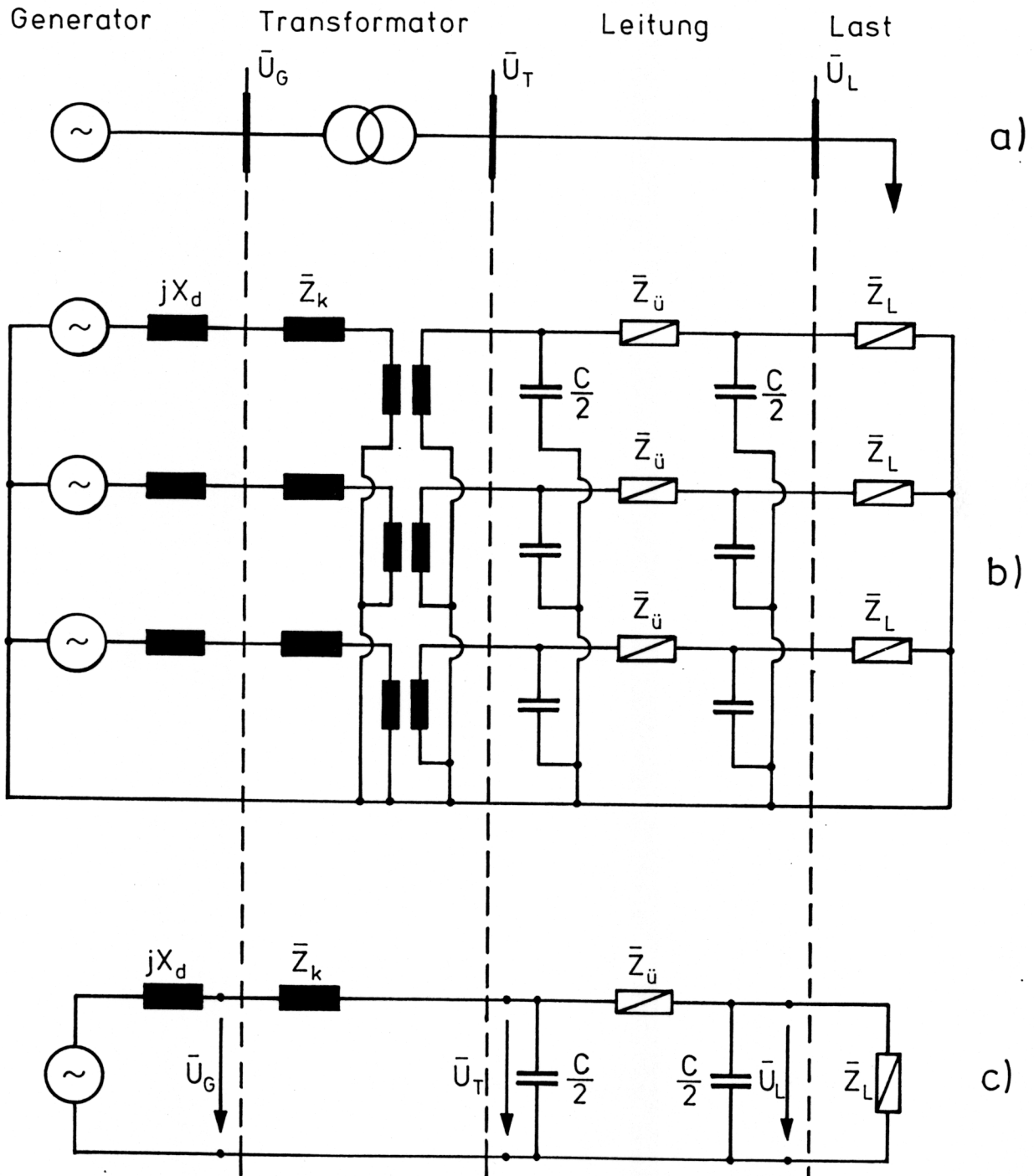
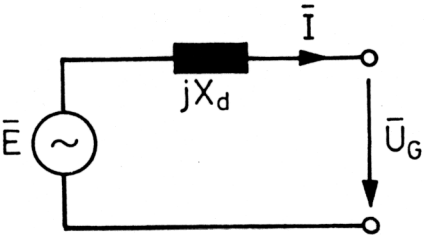
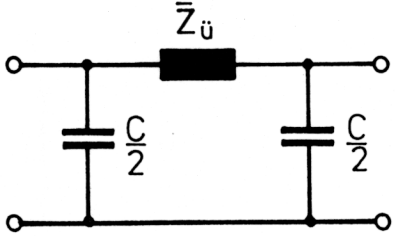
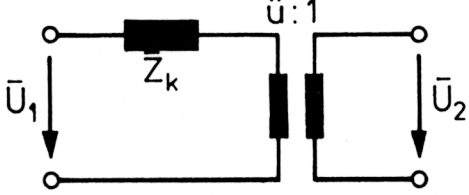
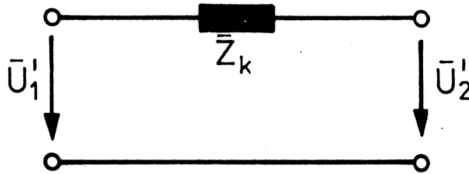
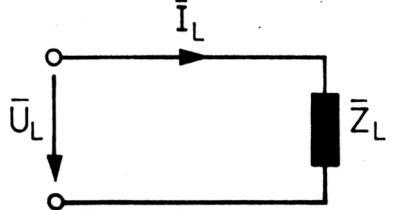


Bild 2.2-1 a) Anlagenbild
b) Dreiphasiges Ersatzschaltbild des Drehstromsystems
c) Einphasiges Ersatzschaltbild für die Berechnung des stationären Betriebszustandes

Darstellung dieses Netzes kann mit den Ersatzschaltbildern für Generator, Transformator, Leitung und Last gemäß der Tabelle 2-1 in eine dreiphasige Darstellung gemäß Bild 2.2-1b überführen. Diese ist allerdings wenig übersichtlich, da sie viele redundante Informationen enthält. Sie läßt sich unmittelbar auf die einphasige Darstellung reduzieren (Bild 2.2-1c). Für die weitere numerische Behandlung ist es vorteilhaft, die im nächsten Abschnitt eingeführte dimensionslose Darstellung zu verwenden.

Tabelle 2-1 Ersatzschaltbilder für wichtige Elemente des Energieübertragungssystems

Element	Ersatzschaltbild	Bemerkungen
Synchrongenerator		$\bar{U} = \bar{E} - \bar{I}_j X_d$ $\bar{E}$: Polradspannung $\bar{U}_G$: Generatorklemmenspannung X_d : synchrone Längsreaktanz
Freileitung Kabel		Leitungslängsimpedanz $\bar{Z}_u = R_u + j X_u$ Querglieder durch Betriebskapazität C gegeben
Transformator mit Nennübersetzungsverhältnis ^a	Physikalische Darstellung  Bezogene Darstellung 	Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ sowie einen idealen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\bar{u}:1$
Lasten		Lastimpedanz $\bar{Z}_L$ durch Spannung $\bar{U}_L$ und Laststrom $\bar{I}_L$ gegeben $\bar{U}_L = \bar{Z}_L \bar{I}_L$

^a Die Ersatzschaltung von Regeltransformatoren mit variablem Übersetzungsverhältnis wird in Abschnitt 2.3 behandelt.

2.2.2 Bezogene Größen

Für die Netzberechnungen bringt das Arbeiten mit bezogenen, dimensionslosen Größen (per unit Darstellung) folgende Vorteile:

- Viele Größen bewegen sich in relativ engen Grenzen, so daß fehlerhafte Werte in der bezogenen Darstellung leicht erkannt werden können.
- Das Rechnen über mehrere Spannungsebenen wird dadurch vereinfacht, daß der ideale Transformator im Ersatzschaltbild nicht berücksichtigt werden muß, wenn die bezogene Darstellung gewählt wird.
- In der bezogenen Darstellung liegen alle Spannungswerte in der Nähe von eins.

Für das Rechnen mit bezogenen Größen in Drehstromsystemen definiert man zunächst die folgenden zwei Basis- oder Bezugsgrößen als Betragswerte

Bezugs-Spannung U_B als verkettete Spannung (Nennspannung)

Bezugs-Leistung S_B als dreiphasige Leistung

Definitionsgemäß gilt somit für die Bezugsspannung einer Leiter-Erd-Spannung

$$U_{a0,B} = U_B / \sqrt{3} . \quad (2.2-2)$$

Die dimensionslose, bezogene Größe bestimmt man nun mit folgender allgemeinen Beziehung aus der physikalischen Größe

$$\text{Bezogene Größe} = \frac{\text{Physikalische Größe}}{\text{Bezugs-Größe}} . \quad (2.2-3)$$

Die bezogene Größe wird im allgemeinen nicht mit einem speziellen Buchstabensymbol gekennzeichnet. Sofern es erforderlich ist, wird im folgenden an Stelle der Dimensionsangabe die Abkürzung pu (= per unit) verwendet. Will man also eine verkettete Spannung U_a als dimensionslose Größe darstellen, so gilt

$$U_{a,pu} = U_a / U_B . \quad (2.2-4)$$

Für die einphasige Darstellung des Drehstromsystems spielt jedoch die Leiter-Erd-Spannung eine wichtige Rolle. Sie lautet in dimensionsloser Darstellung

$$U_{a0,pu} = U_{a0} / U_{a0,B} . \quad (2.2-5)$$

Da jedoch bezüglich der Bezugsspannungen auch die Beziehung

$$U_{a0,B} = U_B / \sqrt{3} \quad (2.2-6)$$

gilt, folgt unmittelbar aus Gl. (2.2-5) für die dimensionslos dargestellte Leiter-Erd-Spannung

$$U_{a0,pu} = \frac{U_{a0}}{U_B / \sqrt{3}} = \frac{U_a / \sqrt{3}}{U_B / \sqrt{3}} = \frac{U_a}{U_B} = U_{a,pu} . \quad (2.2-7)$$

Mit anderen Worten sind somit in der bezogenen Darstellung die verkettete und die Leiter-Erd-Spannung gleich groß; der Faktor $\sqrt{3}$ ist eliminiert.

Ein ähnliches Resultat gilt für den Faktor 3 bei der Leistungsbeziehung zwischen der einphasigen und dreiphasigen Darstellung. Definitionsgemäß gilt für die Bezugsleistung in der einphasigen Darstellung

$$S_{1\phi,B} = S_{3\phi,B}/3 . \quad (2.2-8)$$

Somit gilt für die bezogene Leistung pro Leiter

$$S_{1\phi,pu} = S_{1\phi}/S_{1\phi,B} = (S_{3\phi}/3)/(S_{3\phi,B}/3) = S_{3\phi,pu} . \quad (2.2-9)$$

In der bezogenen Darstellung ist damit die einphasige und die dreiphasige Leistung gleich groß.

Für eine Sternschaltung errechnet sich die Bezugsimpedanz $Z_{B\lambda}$ gemäß

$$Z_{B\lambda} = \frac{U_{a0,B}^2}{S_{1\phi,B}} = \frac{(U_B/\sqrt{3})^2}{S_{3\phi,B}/3} = \frac{U_B^2}{S_B} . \quad (2.2-10)$$

Daraus folgt definitionsgemäß für die Beziehung zwischen der Dreiecks- und Sternimpedanz

$$Z_{B\Delta} = 3 Z_{B\lambda} . \quad (2.2-11)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$Z_{pu\lambda} = Z_{pu\Delta} . \quad (2.2-12)$$

Der Bezugs-Leiterstrom I_B errechnet sich aus

$$I_B = \frac{S_{3\phi,B}}{U_B \sqrt{3}} . \quad (2.2-13)$$

In den weiteren Ausführungen wird auf den Zusatz „pu“ immer dort verzichtet, wo es aus dem Zusammenhang klar hervorgeht, ob mit physikalischen oder bezogenen Größen gerechnet wird.

Ist die Netzberechnung über mehrere Spannungsebenen zu erstrecken, so muß auch das Übersetzungsverhältnis umgerechnet werden. Als Bezugsgröße wird dabei das Nennübersetzungsverhältnis verwendet. Dadurch wird das Nennübersetzungsverhältnis gleich Eins. Für die Darstellung von Transformatoren, die unter Last gestuft werden können und demzufolge im allgemeinen nicht mit dem Nennübersetzungsverhältnis betrieben werden, wird auf den nächsten Abschnitt verwiesen.

2.3 Einphasige, bezogene Darstellung von Drehstromtransformatoren

2.3.1 Transformatoren mit Last-Stufenschalter als Längsregler

Betrachtet man von einem auf der Primärseite, unter Last stufbaren Transformator die Ersatzschaltung, so ist es zweckmäßig, von Bild 2.3-1 auszugehen. Es zeigt, daß

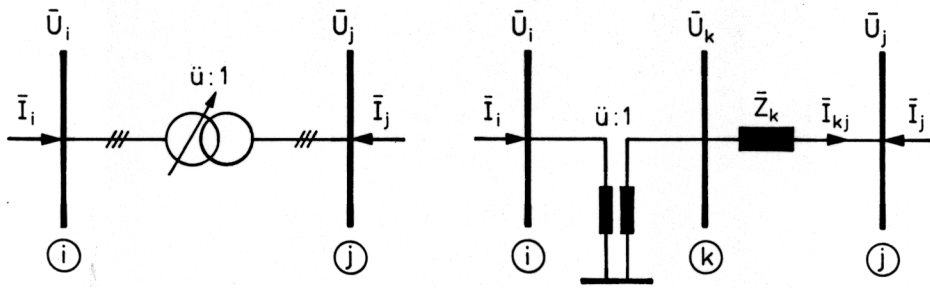


Bild 2.3-1 Anlagen- und Ersatzschaltbild eines Längsregler-Transformators

die einphasige Ersatzschaltung durch die Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ in Reihe mit einem idealen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\bar{u}$ darzustellen ist. Für Drehstromtransformatoren ist je nach Schaltungsart nach der Durchführung einer stationären Netzberechnung noch die durch die Kennziffer k vorgegebene Phasendrehung zwischen Primär- und Sekundärspannung zu berücksichtigen.

Ist nun das bezogene Übersetzungsverhältnis $\bar{u} \neq 1$, so können die Admittanzen $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ des unsymmetrischen π -Ersatzschaltbildes in Bild 2.3-2 dadurch berechnet werden, daß man Primär- und Sekundärstrom einerseits mit der Schaltung nach Bild 2.3-1 und andererseits mit derjenigen nach Bild 2.3-2 berechnet. Die gesuchten Admittanzen ergeben sich dann durch Koeffizientenvergleich, wie im folgenden gezeigt wird.

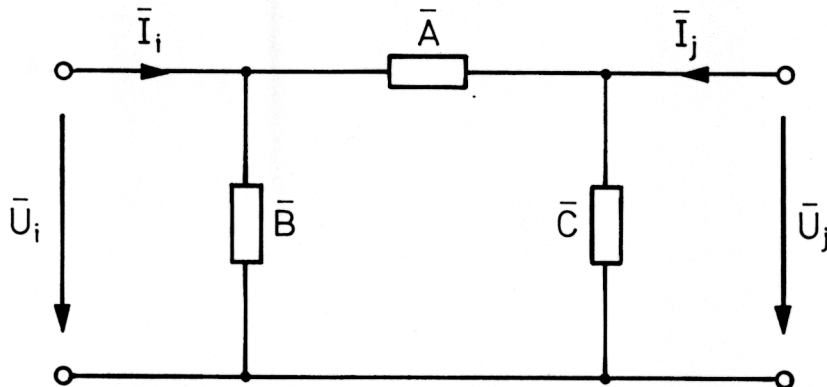


Bild 2.3-2 Unsymmetrisches Ersatzschaltbild des Längsreglers (unter Last stufbarer Regeltransformator)

Definitionsgemäß gilt für den Transformatorstrom in Knoten i

$$\bar{I}_i = \bar{I}_{kj} / \bar{u} , \quad (2.3-1)$$

wobei der Strom $\bar{I}_{kj}$ durch die Kurzschluß-Impedanz $\bar{Z}_k$ zwischen dem fiktiven Knoten k und der Sekundärseite j fließt. Er ist somit durch

$$\bar{I}_{kj} = \frac{\bar{U}_k - \bar{U}_j}{\bar{Z}_k} \quad (2.3-2)$$

gegeben. Daraus folgt für den Primärstrom

$$\bar{I}_i = \frac{\bar{U}_k - \bar{U}_j}{\bar{u} \bar{Z}_k} . \quad (2.3-3)$$

Nun muß noch die fiktive Hilfsspannung $\bar{U}_k$ mit der Beziehung

$$\bar{U}_k = \bar{U}_i / \bar{u} \quad (2.3-4)$$

aus Gl. (2.3-3) eliminiert werden. Damit erhält man schließlich

$$\bar{I}_i = \frac{\bar{U}_i - \bar{u} \bar{U}_j}{\bar{u}^2 \bar{Z}_k} \quad (2.3-5)$$

Analog läßt sich der Sekundärstrom $\bar{I}_j$ durch Primär- und Sekundärspannung berechnen

$$\bar{I}_j = (\bar{U}_j - \bar{U}_k) / \bar{Z}_k \quad (2.3-6)$$

Ersetzt man die Spannung $\bar{U}_k$ durch Gl. (2.3-4), ergibt sich

$$\bar{I}_j = \frac{1}{\bar{u} \bar{Z}_k} (\bar{u} \bar{U}_j - \bar{U}_i) \quad (2.3-7)$$

Berechnet man nun die beiden Ströme $\bar{I}_i$ und $\bar{I}_j$ mit der in Bild 2.3-2 gezeigten Ersatzschaltung, so ergibt sich

$$\bar{I}_i = (\bar{U}_i - \bar{U}_j) \bar{A} + \bar{U}_i \bar{B} \quad \text{und} \quad \bar{I}_j = (\bar{U}_j - \bar{U}_i) \bar{A} + \bar{U}_j \bar{C} \quad (2.3-8)$$

Setzt man willkürlich $\bar{U}_i = 0/0^\circ$ und $\bar{U}_j = 1/0^\circ$ in Gl. (2.3-5) und (2.3-8) ein, so erhält man unmittelbar

$$\bar{I}_i = -\frac{1}{\bar{u} \bar{Z}_k} = -\bar{A} \quad (2.3-9)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die gesuchten Admittanzen $\bar{B}$ und $\bar{C}$ berechnen

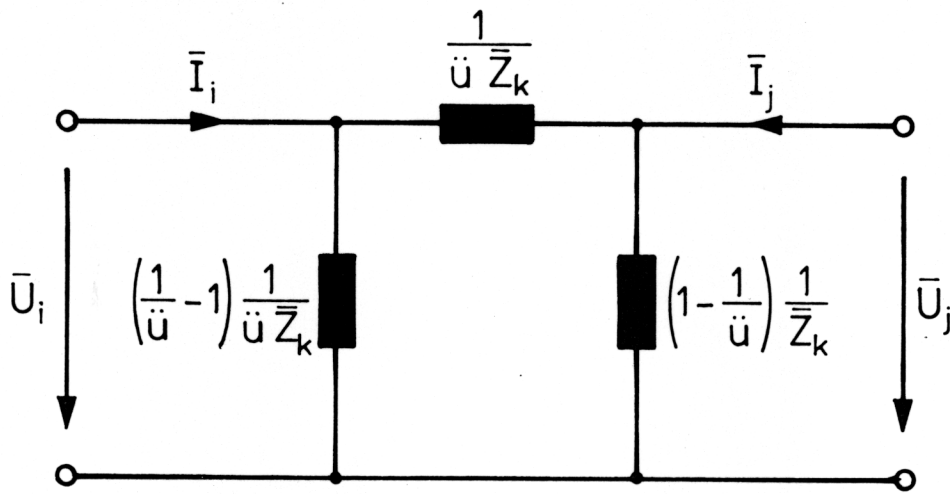
$$\bar{B} = \frac{1}{\bar{u} \bar{Z}_k} \left(\frac{1}{\bar{u}} - 1 \right) \quad (2.3-10)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_k} \left(1 - \frac{1}{\bar{u}} \right) \quad (2.3-11)$$

Das in Bild 2.3-3 gezeigte Ersatzschaltbild des Transformators mit $\bar{u} \neq 1$ ist nicht symmetrisch. Wählt man $\bar{u} = 1$, so erhält man unmittelbar das bereits in Tabelle 2-1 gezeigte Ersatzschaltbild. Es ist darauf hinzuweisen, daß die Elemente des Längs-Regeltransformators immer dann neu berechnet werden müssen, wenn im Laufe einer Rechnung das Übersetzungsverhältnis verändert wird.

2.3.2 Transformator als Schrägeregler

Beim Schrägeregler werden sowohl Betrag wie auch die Phase der Sekundärspannung verändert; d. h. es muß mit einem komplexen Übersetzungsverhältnis $\bar{u}$ entsprechend der Beziehung

Bild 2.3-3 Unsymmetrisches Ersatzschaltbild des Längsreglers mit $\bar{B} \neq \bar{C}$

$$\bar{U}_i / \bar{U}_s = \bar{u} = a + jb \quad (2.3-12)$$

gearbeitet werden. Dabei werden die in Bild 2.3-4 gezeigten Größen benutzt. Da man wiederum von einem idealen Transformator ausgeht, treten keine Verluste auf; d. h. für die Primär- und Sekundärseite gilt

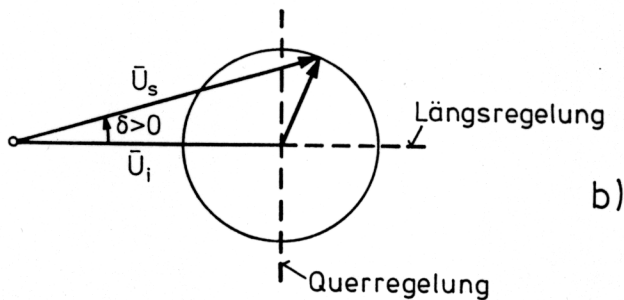
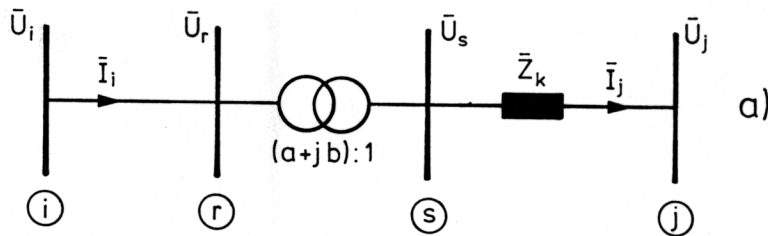


Bild 2.3-4 a) Ersatzschaltbild des Schrägregeltransformators mit komplexem Übersetzungsverhältnis
b) Zeigerdiagramm des Schrägreglers mit Ortskurven für Längs- und Querregelung

$$\bar{U}_i^* \bar{I}_i = \bar{U}_s^* \bar{I}_j \quad (2.3-13)$$

Gl. (2.3-13) in Gl. (2.3-12) eingesetzt ergibt

$$\bar{I}_i / \bar{I}_j = \bar{U}_s^* / \bar{U}_i^* = 1 / (a - jb) \quad (2.3-14)$$

Da der Strom $\bar{I}_j$ durch die Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ gegeben ist, gilt mit den Knotenspannungen $\bar{U}_s$ und $\bar{U}_j$

$$\bar{I}_j = \frac{1}{\bar{Z}_k} (\bar{U}_s - \bar{U}_j) . \quad (2.3-15)$$

Setzt man Gl. (2.3-15) in Gl. (2.3-14) ein, so gilt

$$\bar{I}_i = \frac{1}{\bar{Z}_k(a - j b)} (\bar{U}_s - \bar{U}_j) . \quad (2.3-16)$$

Ersetzt man hier die fiktive Hilfsspannung $\bar{U}_s$ mit Hilfe von Gl. (2.3-12), so erhält man anstelle von Gl. (2.3-16) die Beziehung

$$\bar{I}_i = \frac{1}{\bar{Z}_k(a^2 + b^2)} (\bar{U}_i - (a + j b) \bar{U}_j) . \quad (2.3-17)$$

Bei entsprechender Vorgehensweise erhält man für den Strom $\bar{I}_j$ mit Gl. (2.3-15) und (2.3-12)

$$\bar{I}_j = \frac{1}{\bar{Z}_k(a + j b)} ((a + j b) \bar{U}_j - \bar{U}_i) . \quad (2.3-18)$$

Geht man nun vom allgemeinen Ersatzschaltbild 2.3-2 und der Gl. (2.3-8) für den Primär- und Sekundärstrom aus, so erhält man mit der Annahme $\bar{U}_i = 0/0^\circ$ und $\bar{U}_j = 1/0^\circ$ für die Admittanz $\bar{A}$ mit Gl. (2.3-17) durch Koeffizientenvergleich

$$\bar{I}_i = -\bar{u} \frac{1}{\bar{Z}_k \bar{u} \bar{u}^*} = -\bar{A} . \quad (2.3-19)$$

Vereinfacht läßt sich somit die Admittanz $\bar{A}$ als

$$\bar{A} = 1/(\bar{u}^* \bar{Z}_k) \quad (2.3-20)$$

darstellen. Entsprechend erhält man für die beiden Querglieder

$$\bar{B} = \frac{1}{\bar{u}^* \bar{Z}_k} \left(\frac{1}{\bar{u}} - 1 \right) , \quad (2.3-21)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_k} \left(1 - \frac{1}{\bar{u}^*} \right) . \quad (2.3-22)$$

Stellt man das komplexe Übersetzungsverhältnis in Polarkoordinaten

$$\bar{u} = a + j b = t(\cos \delta + j \sin \delta) \quad (2.3-23)$$

dar, so gilt für die Beträge der Knotenspannungen $\bar{U}_i$ und $\bar{U}_s$ die Beziehung

$$U_i = t U_s . \quad (2.3-24)$$

Falls die Phasendrehung δ von Knoten i nach s positiv ist, dann eilt die Spannung $\bar{U}_i$ der Spannung $\bar{U}_s$ vor, so wie das in Bild 2.3-4 dargestellt ist.

2.4 Netzgleichungen

2.4.1 Knotenadmittanzmatrix

Für die mathematische Beschreibung eines Energieübertragungsnetzes im stationären Normalbetriebszustand eignet sich die Knotenadmittanzmatrix Y_k besonders gut. Dabei wird in jedem Netzknoten der Knotenstrom $\bar{I}_i$ und die Knotenspannung $\bar{U}_i$ durch den linearen Zusammenhang

$$I_k = Y_k U_k \quad (2.4-1)$$

beschrieben. Dabei ist der Knotenstromvektor I_k durch die n komplexen Knotenströme $\bar{I}_i$

$$I_k = [\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_i, \dots, \bar{I}_n]^T \quad (2.4-2)$$

und der Knotenspannungsvektor U_k durch die n komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$

$$U_k = [\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_i, \dots, \bar{U}_n]^T \quad (2.4-3)$$

gegeben. Die komplexen Elemente $\bar{y}_{ik}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k erhält man mit folgendem Bildungsgesetz

- Die Diagonalelemente $\bar{y}_{ii}$ sind durch die Summe aller mit dem Knoten i verbundenen Admittanzen $\bar{Y}_{ik}$, die durch die Menge $\alpha(i)$ bezeichnet werden, gegeben

$$\bar{y}_{ii} = \sum_{k \in \alpha(i)} \bar{Y}_{ik} \quad (2.4-4)$$

- Die übrigen Elemente $\bar{y}_{ik}$ sind durch die negativen Werte der zwischen den Knoten i und k vorhandenen Admittanzen $\bar{Y}_{ik}$ gegeben

$$\bar{y}_{ik} = -\bar{Y}_{ik} \quad (2.4-5)$$

Es ist darauf zu achten, daß $\bar{y}_{ik}$ die komplexen Elemente der Knotenadmittanzmatrix Y_k beschreibt, während $\bar{Y}_{ik}$ komplexe Admittanzwerte von Netzelementen darstellen.

2.4.2 Leistungs-Spannungs-Gleichungen

Die komplexen Knotenleistungen $\bar{S}_i$ berechnet man als Differenz zwischen der von den Kraftwerken in Knoten i eingespeisten Scheinleistung $\bar{S}_{Gi}$ und der im Knoten i den Verbrauchern zugeführten Scheinleistung $\bar{S}_{Li}$; d. h.

$$\bar{S}_i = P_i + jQ_i = \bar{S}_{Gi} - \bar{S}_{Li} \quad (2.4-6)$$

Bild 2.4-1 zeigt den Knoten i mit den Kraftwerkeinspeisungen $\bar{S}_{Gi}$ und den Lasten $\bar{S}_{Li}$. Die Nettoscheinleistung $\bar{S}_i$ sowie der Knotenstrom $\bar{I}_i$ sind durch die Leistungsbeziehung

$$\bar{I}_i = \bar{S}_i^* / \bar{U}_i^* \quad (2.4-7)$$

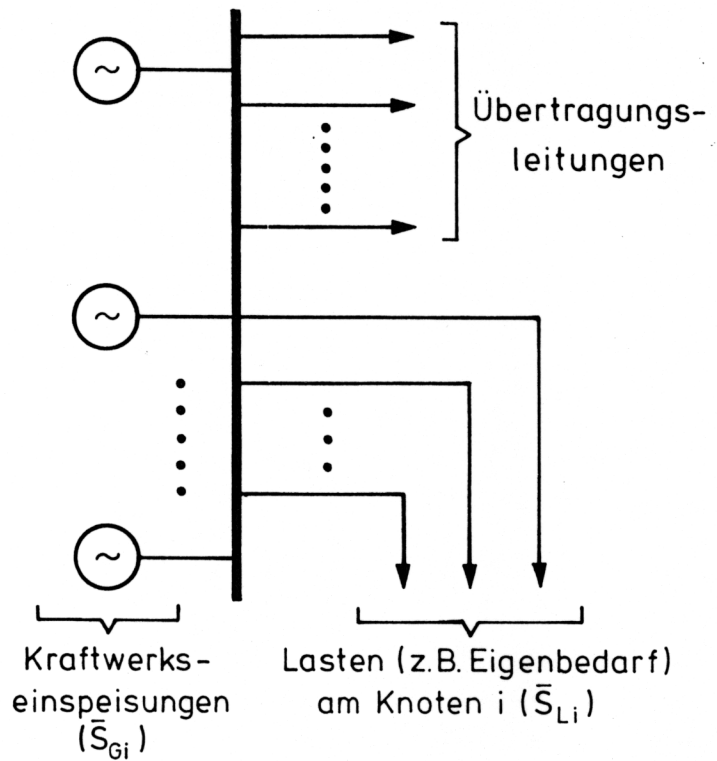


Bild 2.4-1 Vereinfachte Darstellung des Knotens i mit Kraftwerkeinspeisungen $\bar{S}_{Gi}$, Lasten $\bar{S}_{Li}$ und Übertragungsleitungen

verknüpft. Ersetzt man nun die Knotenströme $\bar{I}_i$ in Gl. (2.4-1) durch (2.4-7), so gilt für den Knoten i

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij}^* \bar{U}_j^* . \quad (2.4-8)$$

Dabei bezeichnet n die gesamte Anzahl von Netzknoten.

Für den Leistungsfluß $\bar{S}_{ij}$, der über das die Knoten i und j verbindende Netzelement fließt, erhält man mit dem allgemeinen in Bild 2.4-2 gezeigten π -Ersatzschaltbild

$$\bar{S}_{ij}^* = \bar{U}_i^* \bar{I}_{ij} = P_{ij} - j Q_{ij} = \bar{U}_i^* (\bar{U}_i - \bar{U}_j) \bar{Y}_{ij} + \bar{U}_i^2 \bar{Y}_{i0} . \quad (2.4-9)$$

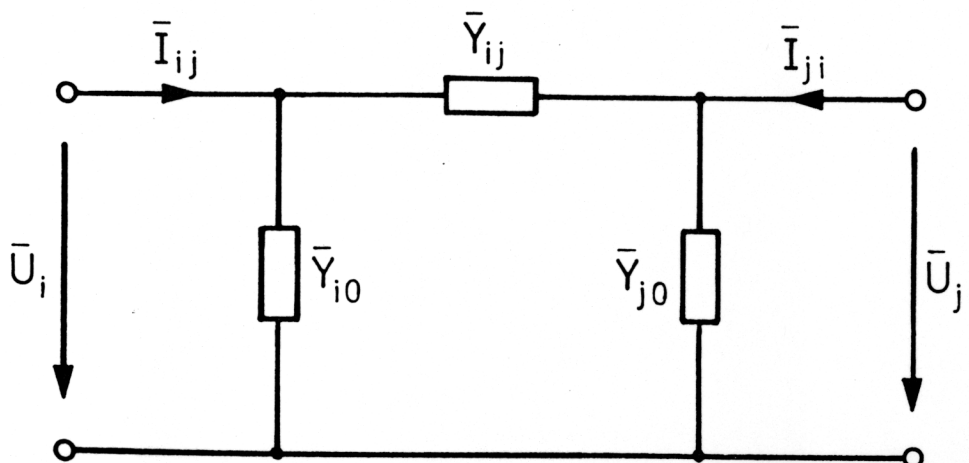


Bild 2.4-2 Allgemeines Ersatzschaltbild eines Netzelementes zwischen Knoten i und j mit den Admittanzen $\bar{Y}_{ij}$, $\bar{Y}_{i0}$ und $\bar{Y}_{j0}$

In der umgekehrten Richtung fließt die Scheinleistung

$$\bar{S}_{ji}^* = \bar{U}_j^* \bar{I}_{ji} = P_{ji} - j Q_{ji} = \bar{U}_j^* (\bar{U}_j - \bar{U}_i) \bar{Y}_{ij} + U_j^2 \bar{Y}_{j0} . \quad (2.4-10)$$

Die Übertragungsverluste $\bar{S}_{uv}$ ergeben sich aus der Summe der beiden Leistungsflüsse $\bar{S}_{ij}$ und $\bar{S}_{ji}$ entsprechend

$$\bar{S}_{uv} = \bar{S}_{ij} + \bar{S}_{ji} . \quad (2.4-11)$$

Unter Bezug auf Gl. (2.4-9) und (2.4-10) sieht man sofort, daß die Übertragungsverluste von den Knotenspannungen $\bar{U}_i$ und $\bar{U}_j$ abhängig sind. Mit anderen Worten können die Netzverluste erst dann berechnet werden, wenn die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ in allen Netzknoten bekannt sind.

2.4.3 Darstellung der Netzgleichungen in Polarkoordinaten

Die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ werden alle auf die gemeinsame Referenzachse, die hier immer mit der Spannung in Knoten 1 (Referenzknoten) zusammenfällt, bezogen; d. h.

$$\bar{U}_i = U_i / \delta_i \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n . \quad (2.4-12)$$

Für den Referenzknoten 1 gilt entsprechend der hier gemachten Annahme

$$\bar{U}_1 = U_1 / 0^\circ . \quad (2.4-13)$$

Die komplexen Elemente $\bar{y}_{ij}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k werden in Polarkoordinaten durch

$$\bar{y}_{ij} = y_{ij} / \theta_{ij} \quad (2.4-14)$$

dargestellt. Damit lauten die Netzgleichungen (2.4-8) nach Wirk- und Blindleistung getrennt in Polarkoordinatendarstellung

$$P_i = P_{Gi} - P_{Li} = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) \quad (2.4-15)$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Li} = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (2.4-16)$$

2.4.4 Darstellung der Netzgleichungen in kartesischen Koordinaten

Stellt man die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ durch kartesische Koordinaten dar, so gilt mit

$$\bar{U}_i = e_i + j f_i \quad (2.4-17)$$

und der Darstellung der komplexen Elemente $\bar{y}_{ij}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k durch

$$\bar{y}_{ij} = g_{ij} + j b_{ij} \quad (2.4-18)$$

für die Netzgleichungen (2.4-8)

$$P_i + j Q_i = (e_i + j f_i) \sum_{j=1}^n (g_{ij} + j b_{ij})^* (e_j + j f_j)^* \quad (2.4-19)$$

Aufgelöst nach Real- und Imaginärteil erhält man für die Wirk- und die Blindleistung

$$P_i = \sum_{j=1}^n \{e_i (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) + f_i (f_j g_{ij} + e_j b_{ij})\} \quad (2.4-20)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \{f_i (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) - e_i (f_j g_{ij} + e_j b_{ij})\} \quad (2.4-21)$$

2.4.5 Bemerkungen

Unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems erhält man für die Netzgleichungen ein System von nichtlinearen, algebraischen Gleichungen. Jedem Knoten i können die folgenden sechs Variablen zugeordnet werden

Einspeisung	Last	Spannung
P_{Gi}	P_{Li}	U_i
Q_{Gi}	Q_{Li}	δ_i

Die Nettowirkleistung P_i und die Nettoblindleistung Q_i eines Knotens i errechnen sich gemäß Gl. (2.4-6) als Differenz der Einspeisung und Last. Dabei können einzelne Leistungen auch den Wert Null annehmen, z. B. wenn keine Kraftwerkeinspeisung in Knoten i vorhanden ist. Nimmt man an, daß die Lasten P_{Li} und Q_{Li} vorgegeben sind, so müssen noch zwei weitere Größen in jedem Knoten vorgegeben werden, um die beiden nichtlinearen Gleichungen (2.4-15) und (2.4-16) resp. (2.4-20) und (2.4-21) eindeutig lösen zu können. Die Wahl, welche Variablen spezifiziert werden sollen, ist durch die in Knoten i angeschlossenen Netzelemente gegeben (siehe Abschn. 2.5).

2.5 Klassierung der Knoten

Der Referenzknoten, der im folgenden immer die Knotennummer 1 hat, entspricht einer leistungsfähigen Kraftwerk- oder Netzeinspeisung, in dem weder die Wirkleistung P_{G1} noch die Blindleistung Q_{G1} Grenzen unterworfen sind. Der Spannungswinkel δ_1 wird zu Null gesetzt, um alle übrigen komplexen Spannungen darauf beziehen zu können. Der Spannungsbetrag wird vorgegeben, wobei dafür im allgemeinen die Nennspannung, d. h. $U_1 = 1.0$, gewählt wird. Insgesamt sind somit für den Referenzknoten die Wirk- und Blindeinspeisungen P_{G1} und Q_{G1} zu bestimmen, da P_{L1} und Q_{L1} fest sind.

In einem Lastknoten sind die Wirk- und Blindeinspeisungen $P_{Gi} = Q_{Gi} = 0$. Da wiederum die Lasten P_{Li} und Q_{Li} vorgegeben sind, müssen in einem Lastknoten die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ bestimmt werden und zwar nach Betrag U_i und Winkel δ_i .

In Einspeiseknoten wird angenommen, daß die Wirkleistungseinspeisung P_{Gi} über die Turbinenregelung und der Spannungsbetrag U_i über den Spannungsregler fest vorgegeben werden kann. Somit sind nun der Spannungswinkel δ_i und die Blindleistung Q_i die in einem Einspeiseknoten zu bestimmenden Größen. Allerdings ist dabei in jedem Fall zu beachten, daß die Betriebsgrenzen

$$P_{Gi, \min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi, \max} \quad (2.5-1)$$

eingehalten werden. Ebenso müssen auch die Blindleistungsgrenzen für Q_{Gi} eingehalten werden. Dies ist nicht so leicht zu überprüfen, denn Q_{Gi} ist ja zunächst eine unbekannte Größe in einem Einspeiseknoten. Nach jedem Rechenschritt ist deshalb die Betriebsbedingung

$$Q_{Gi, \min} \leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi, \max} \quad (2.5-2)$$

zu prüfen. Falls sie nicht erfüllt ist in Knoten i , muß Q_{Gi} gleich dem Grenzwert $Q_{Gi, \min}$ resp. $Q_{Gi, \max}$ gesetzt werden und U_i als freie, durch Lösung der Netzgleichungen zu bestimmende Größe behandelt werden. Mit anderen Worten wird der Knoten i in diesem Moment zu einem Lastknoten. Sobald die Ungleichung (2.5-2) im weiteren Rechenverlauf wieder erfüllt ist, ändert sich die Knotenart erneut zu einem Einspeiseknoten.

Diesen Ausführungen entsprechend zeigt Tabelle 2-2 die Klassierung der Knoten in die im voraus festgelegten und durch die Netzgleichungen zu bestimmenden Größen. Dabei ist die durchschnittliche Anzahl der verschiedenen Netzknotentypen ebenfalls angegeben.

Tabelle 2-2 Klassierung der Knoten

Knotenart	Typ	Spezifizierte Größe	Unbekannte Größe	Anzahl
Referenzknoten	Ref	$U_i, \delta_i, P_{Li}, Q_{Li}$	P_{Gi}, Q_{Gi}	1
Lastknoten	$P-Q$	$P_{Gi} = 0, Q_{Gi} = 0, P_{Li}, Q_{Li}$	U_i, δ_i	85%
Einspeisung	$P-U$	$P_{Gi}, U_i, P_{Li}, Q_{Li}$	Q_{Gi}, δ_i	15%

Die Aufgabe der Netzberechnung (Lastflußberechnung) besteht nun darin, das Gleichungssystem (2.4-15) und (2.4-16) resp. (2.4-20) und (2.4-21) für alle n Knoten aufzustellen und unter Berücksichtigung der Datenspezifikation nach Tabelle 2-2 zu lösen.

Die in Tabelle 2-2 zusammengestellten Werte lassen sich auch nach systemtechnischen Gesichtspunkten klassieren. Der Betriebszustand eines elektrischen Energieübertragungssystems im stationären Zustand ist durch die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ bestimmt. Man definiert deshalb den Zustandsvektor x wie folgt

$$x = [\delta_1 = 0, U_1, \delta_2, U_2, \dots, \delta_n, U_n]^T \quad (2.5-3)$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl der Netzknoten. Der Zustandsvektor x wird durch die Kraftwerkeinspeisungen P_{Gi} und Q_{Gi} beeinflusst. Die Einspeisungen spielen dabei die Rolle von Steuergrößen, mit denen gezielt die Spannungen verändert werden können. Deshalb definiert man als Steuervektor u

$$u = [P_{G1}, Q_{G1}, P_{G2}, Q_{G2}, \dots, P_{Gn}, Q_{Gn}]^T. \quad (2.5-4)$$

Dieser Steuervektor muß ständig an die momentane Last angepaßt werden. Da die Last unter normalen Betriebsbedingungen nicht beeinflusst werden kann, bilden sie den von außen auf das System einwirkenden Störvektor p

$$p = [P_{L1}, Q_{L1}, P_{L2}, Q_{L2}, \dots, P_{Ln}, Q_{Ln}]^T. \quad (2.5-5)$$

Zusammenfassend lassen sich somit die nichtlinearen Netzgleichungen allgemein auch als

$$f(x, u, p) = 0 \quad (2.5-6)$$

schreiben. Bei dieser Darstellung wird angenommen, daß im Netz nur $P-Q$ Knoten vorhanden sind.

2.6 Beispiel

In diesem Abschnitt sollen die bisherigen Überlegungen auf das in Bild 2.6-1a gezeigte dreiknotige Testnetz mit drei gleichen Leitungen angewendet werden. In einem ersten Schritt ist das einphasige Ersatzschaltbild mit Hilfe der in Tabelle 2-1 aufgeführten Ersatzschaltungen entsprechend Bild 2.6-1b zu zeichnen. Knoten 1 ist der Referenzknoten mit der Einspeisung $\bar{S}_{G1}$. Ferner ist in Knoten 1 die Last $\bar{S}_{L1}$ vorgegeben. Die Nettoeinspeisung $\bar{S}_1 = \bar{S}_{G1} - \bar{S}_{L1}$ ist als „Leistungseinspeisung“ gekennzeichnet. In Knoten 2 befindet sich eine Kraftwerkeinspeisung $\bar{S}_{G2}$. In Knoten 3 befindet sich eine Last mit dem Verbrauch $\bar{S}_{L3}$. Um in Knoten 3 die Spannung beeinflussen zu können, ist hier symbolisch ein Kondensator mit der Blindleistungseinspeisung Q_{G3} eingezeichnet, der für die Blindleistungskompensation eingesetzt werden kann. Die Leitungen zwischen den Knoten werden durch drei gleiche Ersatzschaltbilder dargestellt.

Durch Zusammenfassen aller Leitungsadmittanzen erhält man die Ersatzschaltung für das zu berechnende Netz entsprechend Bild 2.6-2. Es besteht nach der Zusammenfassung aller parallelen Admittanzen aus sechs Admittanzen. Unter Verwendung des 1. Kirchhoffschen Gesetzes ergibt sich für den Knotenstrom $\bar{I}_i$ in den drei Netzknoten $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{U}_1 \bar{Y}_{10} + (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) \bar{Y}_{12} + (\bar{U}_1 - \bar{U}_3) \bar{Y}_{13} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{10} = \bar{Y}_{12}^0 + \bar{Y}_{13}^0 \\ \bar{I}_2 &= \bar{U}_2 \bar{Y}_{20} + (\bar{U}_2 - \bar{U}_1) \bar{Y}_{12} + (\bar{U}_2 - \bar{U}_3) \bar{Y}_{23} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{20} = \bar{Y}_{21}^0 + \bar{Y}_{23}^0 \\ \bar{I}_3 &= \bar{U}_3 \bar{Y}_{30} + (\bar{U}_3 - \bar{U}_1) \bar{Y}_{13} + (\bar{U}_3 - \bar{U}_2) \bar{Y}_{23} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{30} = \bar{Y}_{31}^0 + \bar{Y}_{32}^0 \end{aligned} \quad (2.6-1)$$

Unter der Annahme, daß alle drei Leitungen gleich sind, gilt für die Admittanzwerte in Gl. (2.6-1) unter Beachtung, daß $\bar{Y}_{ij} = \bar{Y}_{ji}$ gilt

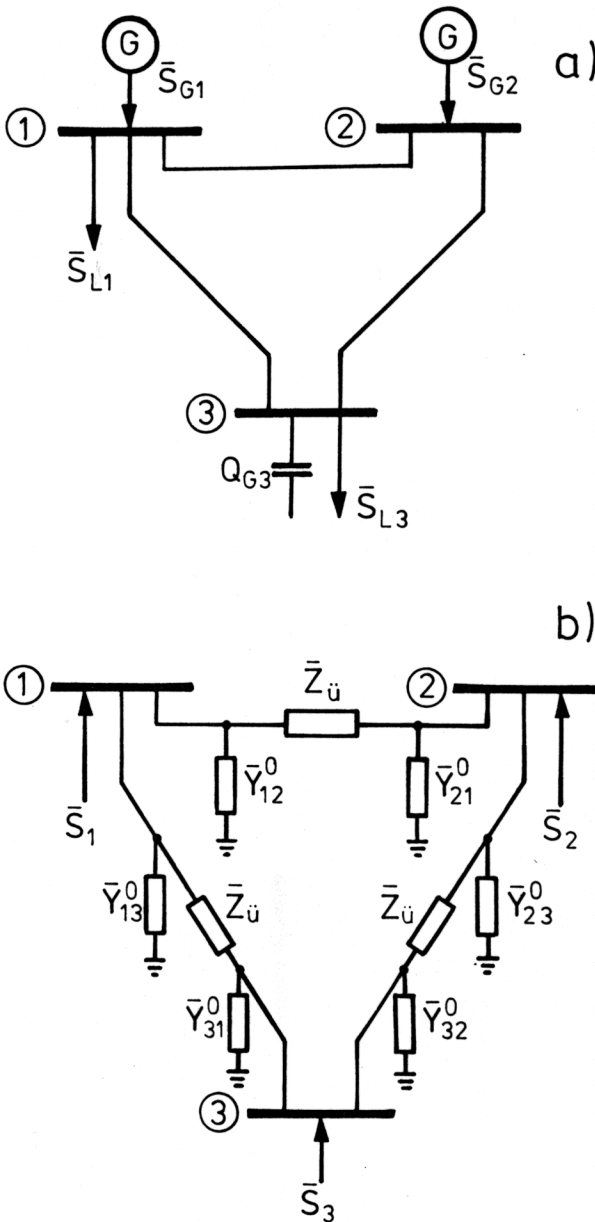


Bild 2.6-1 a) Anlagenbild des dreiknotigen Testnetzes
 b) Einphasiges Ersatzschaltbild mit der Nettoleistungseinspeisung (Knotenleistung)
 $\bar{S}_i = \bar{S}_{Gi} - \bar{S}_{Li}$ in Knoten i

$$\bar{Y}_{10} = \bar{Y}_{20} = \bar{Y}_{30} = j \frac{\omega C}{2} + j \frac{\omega C}{2} = j \omega C = j \frac{1}{X_c} \quad (2.6-2)$$

$$\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{13} = \bar{Y}_{23} = 1/\bar{Z}_{\bar{u}} .$$

Durch Zusammenfassen der Terme mit $\bar{U}_i$ läßt sich die Gl. (2.6-1) wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{U}_1 (\bar{Y}_{10} + \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{13}) - \bar{U}_2 \bar{Y}_{12} - \bar{U}_3 \bar{Y}_{13} \\ \bar{I}_2 &= -\bar{U}_1 \bar{Y}_{12} + \bar{U}_2 (\bar{Y}_{20} + \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{23}) - \bar{U}_3 \bar{Y}_{23} . \\ \bar{I}_3 &= -\bar{U}_1 \bar{Y}_{13} - \bar{U}_2 \bar{Y}_{23} + \bar{U}_3 (\bar{Y}_{30} + \bar{Y}_{13} + \bar{Y}_{23}) \end{aligned} \quad (2.6-3)$$

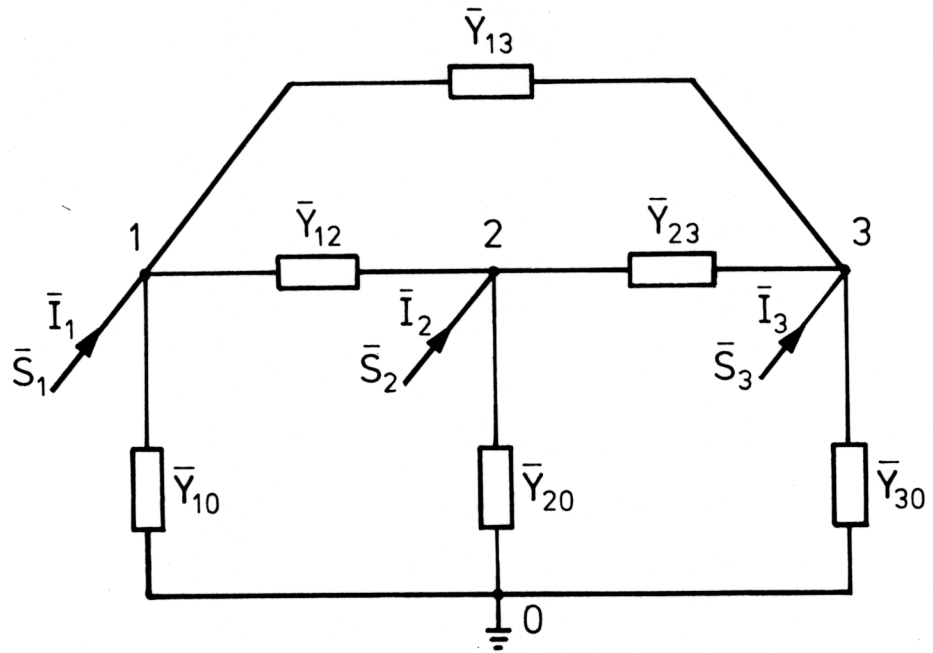


Bild 2.6-2 Vereinfachtes Ersatzschaltbild durch Zusammenfassung der Netzsadmittanzen

Diese Darstellung entspricht Gl. (2.4-1). Daß die Elemente $\bar{y}_{ik}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k gemäß der bereits erwähnten Definitionen (2.4-4) und (2.4-5) zu bilden sind, zeigt sofort der Vergleich mit Gl. (2.6-3)

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \bar{y}_{11} \bar{U}_1 + \bar{y}_{12} \bar{U}_2 + \bar{y}_{13} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_2 &= \bar{y}_{21} \bar{U}_1 + \bar{y}_{22} \bar{U}_2 + \bar{y}_{23} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_3 &= \bar{y}_{31} \bar{U}_1 + \bar{y}_{32} \bar{U}_2 + \bar{y}_{33} \bar{U}_3\end{aligned}\quad (2.6-4)$$

Die Elemente $\bar{y}_{ik}$ können auch unmittelbar mit dem Bildungsgesetz für Y_k bestimmt werden, wobei jedoch Gl. (2.6-2) zu beachten ist. In diesem Zusammenhang wird noch einmal explizit auf den Unterschied zwischen $\bar{Y}_{ik}$ (= Admittanzwert eines Elementes des Ersatzschaltbildes) und $\bar{y}_{ik}$ (= Element der Knotenadmittanzmatrix Y_k) hingewiesen.

$$\left. \begin{aligned}\bar{y}_{11} &= \bar{Y}_{10} + \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{13} \\ \bar{y}_{22} &= \bar{Y}_{20} + \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{23} \\ \bar{y}_{33} &= \bar{Y}_{30} + \bar{Y}_{13} + \bar{Y}_{23}\end{aligned} \right\} = j \frac{1}{X_C} + \frac{1}{\bar{Z}_{\bar{u}}} + \frac{1}{\bar{Z}_{\bar{u}}} \quad (2.6-5)$$

Für die Elemente außerhalb der Diagonale gilt

$$\left. \begin{aligned}\bar{y}_{12} &= \bar{y}_{21} = -\bar{Y}_{12} \\ \bar{y}_{13} &= \bar{y}_{31} = -\bar{Y}_{13} \\ \bar{y}_{23} &= \bar{y}_{32} = -\bar{Y}_{23}\end{aligned} \right\} = -\frac{1}{\bar{Z}_{\bar{u}}} \quad (2.6-6)$$

Zusammenfassend läßt sich also festhalten, daß nach dem Aufstellen des einphasigen Ersatzschaltbildes die Knotenadmittanzmatrix Y_k , die das Netz vollständig beschreibt, unmittelbar angegeben werden kann.

Für die weiteren Überlegungen wird auf die bezogene Darstellung übergegangen. Die Bezugswerte sind wie folgt gewählt

Bezugsleistung $S_B = 100 \text{ MVA}$

Bezugsspannung $U_B = 220 \text{ kV}$.

Die Impedanzen der drei Leitungen sind alle gleich groß, nämlich $\bar{Z}_l = j 0,1$. Die Querkapazitäten sollen in diesem Beispiel vernachlässigt werden können. Die Stör-, Steuer- und Zustandsgrößen sind als bezogene Größen in Tabelle 2-3 zusammengestellt.

Tabelle 2-3 Numerische Werte für die Beschreibung des dreiknotigen Testnetzes

Knoten- nummer	Knoten- typ	Kraftwerkeinspeisung		Last		Spannung	
		P_{Gi}	Q_{Gi}	P_{Li}	Q_{Li}	U_i	δ_i
1	Ref	?	?	1,0	0,5	1,0	0,0
2	$P-U$	1,5	?	0,0	0,0	1,0	?
3	$P-Q$	0,0	0,0	1,0	?	?	?

Mit den oben genannten Vereinfachungen läßt sich die Knotenadmittanzmatrix Y_k numerisch sofort berechnen

$$Y_k = j \begin{bmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \\ 10 & 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Die komplexen Netzgleichungen (2.4-8) lauten somit unter Verwendung der in Tabelle 2-3 zusammengestellten Zahlenwerte

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_{G1} - \bar{S}_{L1} = P_1 + j Q_1 = j 20 - j 10 \bar{U}_2^* - j 10 \bar{U}_3^*$$

$$\bar{S}_2 = \bar{S}_{G2} - \bar{S}_{L2} = P_2 + j Q_2 = 1,5 + j Q_2 = -j 10 \bar{U}_2 + j 20 - j 10 \bar{U}_2 \bar{U}_3^* \quad (2.6-7)$$

$$\bar{S}_3 = \bar{S}_{G3} - \bar{S}_{L3} = P_3 + j Q_3 = -1,0 - j 1,0 = -j 10 \bar{U}_3 - j 20 \bar{U}_2^* \bar{U}_3 + j 20 U_3^2.$$

Da der Spannungsbetrag $U_2 = 1,0$ bekannt ist, hat man somit sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten. Die Lösung eines derartigen, nichtlinearen Gleichungssystems wird im nächsten Kapitel behandelt. Aus der Lösung für $\bar{S}_1$ errechnet man die unbekannte Einspeisung $\bar{S}_{G1}$ im Referenzknoten. Ferner bestimmt man mit Q_2 die unbekannte Blindeinspeisung Q_{G2} , wobei $Q_{L2} = 0$ zu beachten ist.

Abschließend sollen nun noch die drei komplexen Netzgleichungen (2.6-7) durch sechs reelle Gleichungen entsprechend Abschnitt 2.4-4 in kartesischen Spannungskoordinaten dargestellt werden. Unter Verwendung der bisher benutzten Zahlenwerte lauten die Gln. (2.4-20) und (2.4-21) mit

$$U_1 = 1,0 \quad U_2 = e_2 + j f_2 \quad U_3 = e_3 + j f_3 \quad (2.6-8)$$

und

$$\bar{y}_{ii} = -j 20 \quad \text{sowie} \quad \bar{y}_{ij} = j 10 \quad \text{für} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \text{und} \quad i \neq j \quad (2.6-9)$$

für die Nettowirkleistungen

$$P_1 = -10 f_2 - 10 f_3$$

$$1.5 = -10 e_2 f_3 + 10 f_2 + 10 e_3 f_2 \quad (2.6-10)$$

$$-1.0 = -10 e_3 f_2 + 10 f_3 + 10 e_2 f_3$$

Die Beziehungen für die Nettoblindleistungen lauten

$$Q_1 = 20 - 10 e_2 - 10 e_3$$

$$Q_2 = -10 e_2 + 20 - 10 e_2 e_3 - 10 f_2 f_3 \quad (2.6-11)$$

$$-1,0 = 20 e_3^2 - 10 e_2 e_3 - 10 f_2 f_3 + 20 f_3^2 - 10 e_3$$

Schließlich ist zur vollständigen Netzberechnung auch noch die Beziehung

$$1,0 = e_2^2 + f_2^2 \quad (2.6-12)$$

zu verwenden, um so aus sieben Gleichungen die sieben Unbekannten P_1 , Q_1 , Q_2 , e_2 , e_3 , f_2 und f_3 bestimmen zu können.

2.7 Abschließende Bemerkungen

Für die Formulierung des stationären, mathematischen Netzmodells bietet sich folgende Vorgehensweise an:

1. Alle Übertragungselemente werden durch ihre einphasigen Ersatzschaltbilder dargestellt.
2. Für das aus Punkt 1 resultierende Ersatzschaltbild des gesamten Netzes wird die Knotenadmittanzmatrix Y_k aufgestellt.
3. Die Netzgleichungen sind entweder durch die Wahl von Polar- oder kartesischen Koordinaten anzugeben.
4. Die Leistungsflüsse durch die Netzelemente lassen sich nach der Bestimmung der Lösung mit Gl. (2.4-9) und (2.4-10) berechnen.

In den folgenden beiden Kapiteln werden die Methoden behandelt, wie die nichtlinearen Netzgleichungen gelöst werden können.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.6-10) bis (2.6-12) wird an dieser Stelle noch nicht hergeleitet, da zunächst die entsprechenden, numerischen Verfahren vorgestellt werden. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß die Annahme eines verlustlosen Übertragungssystems dazu führt, daß die unbekannte Wirkleistung P_1 in Knoten 1 sofort bestimmt werden kann. Da die Summe aller Wirkleistungen P_i über alle drei Knoten gleich Null sein muß, erhält man mit den vorgegebenen Werten $P_1 = -0,5$. Deshalb muß von den drei Gleichungen in (2.6-10) eine für die numerische Lösung weg-

gelassen werden. Man kann sich leicht überzeugen, daß die drei Gleichungen in (2.6-10) voneinander linear abhängig sind.

Aufgaben

Aufgabe 2.1

In einer Drehstromschaltanlage sind an einer 110 kV Sammelschiene zwei Verbraucher mit den Leistungsaufnahmen

$$\bar{S}_{a1} = 300/36,9^\circ \text{ kVA} \quad \text{und} \quad \bar{S}_{a2} = 240/-53,1^\circ \text{ kVA}$$

angeschlossen.

- Gesucht ist die einphasige Ersatzschaltung dieser Lastanordnung
- Das vollständige Zeigerdiagramm der drei Leiterströme des gesamten Laststromes ist zu zeichnen.
- Die einphasige Ersatzschaltung sowie die Leiterströme der beiden Verbraucher sind in bezogenen Größen anzugeben, wenn die Basisleistung $S_B = 300 \text{ kVA}$ und die Basisspannung $U_B = 110 \text{ kV}$ ist.

Aufgabe 2.2

Es ist zu zeigen, daß bei einem 21/380 kV Maschinentransformator mit einer Nennleistung von $S_N = 1000 \text{ MVA}$ das Nennübersetzungsverhältnis in der bezogenen Darstellung $\bar{u} = 1$ ist und somit das Ersatzschaltbild nur aus der Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ besteht.

Aufgabe 2.3

Für einen 380/220 kV Längsregel-Transformator mit $S_N = 1000 \text{ MVA}$ sind die Netzgleichungen sowie die Beziehungen für die Berechnung der Wirk- und Blindleistungsflüsse bei Veränderung des Übersetzungsverhältnisses $\bar{u}$ anzugeben. Dabei ist $\bar{Z}_k = j 0,05$ und für $\bar{u}$ ein Stellbereich von 0,8 bis 1,2 (in bezogener Darstellung) zu benutzen. Für die numerischen Berechnungen soll angenommen werden, daß die Primärseite als Referenzknoten behandelt werden kann; auf der Sekundärseite wird eine Wirkleistung von $P_2 = -1,0$ sowie eine Blindleistung von $Q_2 = 0,5$ angenommen (d. h. das 220 kV Netz speist Blindleistung in das 380 kV Netz ein, während es Wirkleistung aufnimmt).

3 Lastflußberechnung

3.1 Einleitung

Die Bestimmung des Betriebszustandes eines elektrischen Energieübertragungssystems im symmetrischen, ungestörten Fall ist eine ganz zentrale Aufgabe, die sowohl für den Betrieb wie auch die Planung eine wichtige Rolle spielt. Ausgehend von dem in Kapitel 2 behandelten stationären Netzmodell geht es dabei um die Fragen:

- welches Spannungsprofil stellt sich in den Netzknoten bei einer bestimmten Belastung ein
- welche Leistungen fließen über die Netzelemente bei diesem Spannungsprofil.

Die Lösung dieser Aufgaben ist auch im Hinblick auf Erweiterungen durch neue Kraftwerkeinspeisungen und Übertragungsleitungen bei sich verändernder Netzlast von großem Interesse.

Die Ausführungen in Kapitel 2 haben gezeigt, daß in jedem Knoten eine nichtlineare Beziehung gemäß Gl. (2.4-8) zwischen der Knotenleistung $\bar{S}_i$ einerseits und den Knotenspannungen $\bar{U}_i$ andererseits besteht. Von den insgesamt sechs Variablen pro Knoten müssen vier vor der Durchführung der Rechnung spezifiziert werden, um dann aus jeweils einer komplexen Beziehung pro Knoten zwei reelle Größen bestimmen zu können.

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, zu zeigen, wie die nichtlinearen Netzgleichungen auf iterative Art mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst werden können. Das stationäre Netzmodell besteht aus einem System von $2n$ nichtlinearen Gleichungen, die in Kapitel 2 sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten angegeben worden sind.

Nach der numerischen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems stehen folgende Informationen zur Verfügung:

Referenzknoten:	Wirk- und Blindleistungseinspeisungen unter Berücksichtigung der von den Spannungswerten abhängigen Netzverluste
Lastknoten:	Komplexe Knotenspannung nach Betrag und Phase resp. Real- und Imaginärteil
Einspeisung:	Winkel der komplexen Knotenspannung und Blindleistungseinspeisung, um den vorgegebenen Spannungsbetrag einhalten zu können.

Insgesamt ist dadurch der momentane Betriebszustand des Netzes vollständig beschrieben. Von großer Wichtigkeit ist auch die Berechnung der einzelnen Leistungsflüsse $\bar{S}_{ij} = P_{ij} + j Q_{ij}$, die von Knoten i nach j fließen. Gl. (2.4-9) zeigt, daß die Kenntnis der komplexen Knotenspannungen die Voraussetzung für die Berechnung der Leistungsflüsse darstellt. Der Vollständigkeit halber werden diese Beziehungen hier noch einmal wiederholt

$$\bar{S}_{ij}^* = P_{ij} - j Q_{ij} = \bar{U}_i^* (\bar{U}_i - \bar{U}_j) \bar{Y}_{ij} + U_i^2 \bar{Y}_{i0} . \quad (3.1-1)$$

In umgekehrter Richtung gilt für den Leistungsfluß von j nach i

$$\bar{S}_{ji}^* = P_{ji} - j Q_{ji} = \bar{U}_j^* (\bar{U}_j - \bar{U}_i) \bar{Y}_{ji} + U_j^2 \bar{Y}_{j0} . \quad (3.1-2)$$

Da man die Lösung der Lastflußgleichungen mit Vorteil in der bezogenen Darstellung bestimmt, müssen abschließend die Ergebnisse auf physikalische Größen umgerechnet werden.

3.2 Das NEWTON-RAPHSON- Verfahren

3.2.1 Lösung einer nichtlinearen Gleichung mit einer Unbekannten

Um dieses wichtige, numerische Lösungsverfahren auf die stationären Netzgleichungen anwenden zu können, ist es zweckmäßig, zunächst das NEWTON-RAPHSON-Verfahren für die Lösung einer nichtlinearen Gleichung mit einer Unbekannten vorzustellen. Gesucht ist die Lösung x der nichtlinearen Gleichung

$$f(x) = 0 . \quad (3.2-1)$$

Entwickelt man die nichtlineare Funktion $f(x)$ in eine TAYLOR-Reihe um den Punkt x^0 , so gilt

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x^0)}{dx} (x - x^0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x^0)}{dx^2} (x - x^0)^2 + \dots = 0 . \quad (3.2-2)$$

Bricht man die Reihe nach dem Term 1. Ordnung ab, so hat man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$f(x^0) + \frac{df(x^0)}{dx} (x - x^0) = 0 , \quad (3.2-3)$$

das nach x aufgelöst werden kann. Bezeichnet man die Lösung mit x^1 , so gilt

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{df(x^0)/dx} . \quad (3.2-4)$$

Da man Terme höherer Ordnung vernachlässigt hat, wird x^1 noch nicht mit der gesuchten Lösung x übereinstimmen (Bild 3.2-1). Die rekursive Wiederholung von Gl. (3.2-4) lautet

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{df(x^k)/dx} . \quad (3.2-5)$$

Dabei bezeichnet der hochgestellte Index „ k “ resp. „ $k+1$ “ den Iterationsschritt. Er ist nicht als Exponent zu interpretieren. Die allgemeine Rekursion (3.2-5) ist so lange zu wiederholen, bis der Konvergenztest

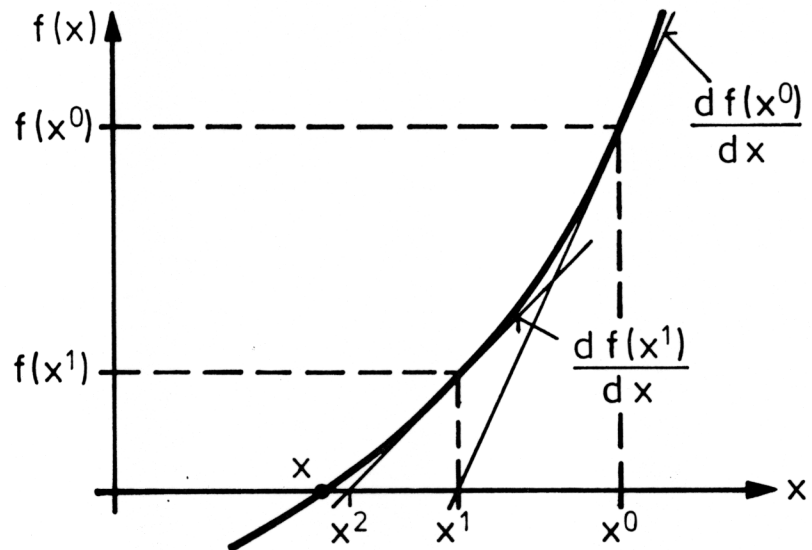


Bild 3.2-1 Graphische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Lösungsalgorithmus nach Gl. (3.2-5)

$$|x^{k+1} - x^k| < \varepsilon \quad (3.2-6)$$

mit vorgegebener Genauigkeitsschranke ε erfüllt ist.

Beispiel: Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren ist für die Bestimmung der Lösung der folgenden Gleichung einzusetzen

$$f(x) = x + \sin x - 2 = 0 \quad (3.2-7)$$

Die in der Rekursion (3.2-5) erforderliche Ableitung ist durch $df/dx = 1 + \cos x$ gegeben. Damit lautet der Rekursions-Algorithmus zur Bestimmung der Lösung der Gl. (3.2-7)

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k + \sin x^k - 2}{1 + \cos x^k} \quad (3.2-8)$$

Die folgende Tabelle zeigt die iterative Lösungsberechnung, wenn der Startwert $x^0 = 0$ gewählt wird.

Iteration	x^k	$f(x^k)$	$df(x^k)/dx$
0	0	-2,0	2,0
1	1	-0,16	1,54
2	1,103	-0,0046	1,451
3	1,10606	-0,00000023	1,448

Wählt man die Konvergenzschranke zu $\varepsilon = 10^{-6}$, so lautet die Lösung $x = 1,10606$.

3.2.2 Anwendung auf Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten

Zunächst sind die Lösungen (x, y) der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2-9)$$

zu bestimmen. Beide Funktionen werden wiederum in eine TAYLOR-Reihe um einen fest gewählten Punkt (x^k, y^k) entwickelt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^k, y^k) + \frac{\partial f(x^k, y^k)}{\partial x} (x - x^k) + \frac{\partial f(x^k, y^k)}{\partial y} (y - y^k) \\ g(x, y) &= g(x^k, y^k) + \frac{\partial g(x^k, y^k)}{\partial x} (x - x^k) + \frac{\partial g(x^k, y^k)}{\partial y} (y - y^k) . \end{aligned} \quad (3.2-10)$$

Durch folgende Notation kann eine übersichtliche Schreibweise erzielt werden

$$\begin{aligned} f(x^k, y^k) &= f^k & g(x^k, y^k) &= g^k \\ \frac{\partial f(x^k, y^k)}{\partial x} &= f_x^k & \frac{\partial g(x^k, y^k)}{\partial x} &= g_x^k . \\ \frac{\partial f(x^k, y^k)}{\partial y} &= f_y^k & \frac{\partial g(x^k, y^k)}{\partial y} &= g_y^k \\ \Delta x &= x - x^k & \Delta y &= y - y^k & \Delta f &= f - f^k & \Delta g &= g - g^k . \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

Somit lautet die Gl. (3.2-10)

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_x^k \Delta x + f_y^k \Delta y \\ \Delta g &= g_x^k \Delta x + g_y^k \Delta y \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle auf die Matrizenschreibweise überzugehen

$$\begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^k & f_y^k \\ g_x^k & g_y^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} . \quad (3.2-13)$$

Die Koeffizientenmatrix der ersten Ableitungen in Gl. (3.2-13) nennt man die JACOBIsche Matrix

$$J^k = \begin{bmatrix} f_x^k & f_y^k \\ g_x^k & g_y^k \end{bmatrix} . \quad (3.2-14)$$

Der Lösungsalgorithmus für das Gleichungssystem (3.2-9) lautet für das Wertepaar (x^k, y^k) wie folgt. Beachtet man, daß die Lösungen für

$$f = 0 \quad \text{und} \quad g = 0 \quad (3.2-15)$$

gesucht sind, kann man in Gl. (3.2-13)

$$\Delta f^k = 0 - f^k \quad \text{und} \quad \Delta g^k = 0 - g^k \quad (3.2-16)$$

sofort berechnen und durch Inversion der JACOBISchen Matrix J für die k -te Iteration die Größen Δx^k und Δy^k gemäß

$$\begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = [J^k]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta f^k \\ \Delta g^k \end{bmatrix} \quad (3.2-17)$$

berechnen. Daraus lassen sich die beiden verbesserten Lösungswerte x^{k+1} und y^{k+1} gemäß der Korrekturformel

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \Delta x^k \\ y^{k+1} &= y^k + \Delta y^k \end{aligned} \quad (3.2-18)$$

berechnen. Von diesen Werten ausgehend wird die nächste, die $k+1$ Iteration durchgeführt. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die Konvergenzgrenze (3.2-6) für beide Werte erfüllt ist.

Die Erweiterung auf $2n$ Unbekannte, die aus $2n$ nichtlinearen Gleichungen zu bestimmen sind, läßt sich wie folgt durchführen. Gegeben sind die $2n$ Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} f_i(x, y) &= 0 \\ g_i(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2-19)$$

mit den beiden Vektoren

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T \\ y &= [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]^T. \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

Die Verallgemeinerung von Gl. (3.2-13) lautet nun

$$\begin{bmatrix} \Delta f_1^k \\ \vdots \\ \Delta f_n^k \\ \Delta g_1^k \\ \vdots \\ \Delta g_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1^k / \partial x_1 \cdots \partial f_1^k / \partial x_n & \partial f_1^k / \partial y_1 \cdots \partial f_1^k / \partial y_n \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_n^k / \partial x_1 \cdots \partial f_n^k / \partial x_n & \partial f_n^k / \partial y_1 \cdots \partial f_n^k / \partial y_n \\ \partial g_1^k / \partial x_1 \cdots \partial g_1^k / \partial x_n & \partial g_1^k / \partial y_1 \cdots \partial g_1^k / \partial y_n \\ \vdots & \vdots \\ \partial g_n^k / \partial x_1 \cdots \partial g_n^k / \partial x_n & \partial g_n^k / \partial y_1 \cdots \partial g_n^k / \partial y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^k \\ \vdots \\ \Delta x_n^k \\ \Delta y_1^k \\ \vdots \\ \Delta y_n^k \end{bmatrix}. \quad (3.2-21)$$

Die entsprechende Matrizenschreibweise lautet

$$\begin{bmatrix} \Delta f^k \\ \Delta g^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{f_x}^k & J_{f_y}^k \\ J_{g_x}^k & J_{g_y}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix}. \quad (3.2-22)$$

Aus dem Vergleich zwischen Gl. (3.2-21) und (3.2-22) wird die Definition der Untermatrizen der JACOBISchen Matrix J in Gl. (3.2-22) deutlich. Die Auflösung nach den Korrekturwerten Δx^k und Δy^k lautet

$$\begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = [J^k]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta f^k \\ \Delta g^k \end{bmatrix}. \quad (3.2-23)$$

Damit werden die neuen, verbesserten Lösungswerte wie folgt bestimmt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{y}^k + \Delta \mathbf{y}^k \end{aligned} \quad (3.2-24)$$

Das Verfahren ist auch hier so lange iterativ zu wiederholen, bis der verallgemeinerte Konvergenztest (3.2-6) erfüllt ist.

3.3 Lösung der nichtlinearen Netzgleichungen

3.3.1 Grundsätzliche Vorgehensweise

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, daß das NEWTON-RAPHSON-Verfahren sehr rasch zu einer Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems konvergiert. In diesem Abschnitt wird nun die Anwendung dieses numerischen Lösungsverfahrens auf die nichtlinearen Netzgleichungen behandelt. Als Ausgangspunkt wählt man die Darstellung in kartesischen Koordinaten, entsprechend Abschnitt 2.4.4. Nach Wirk- und Blindleistung getrennt gelten in jedem der n Netzknoten folgende zwei Beziehungen, die in Kapitel 2 als Gl. (2.4-20) und Gl. (2.4-21) hergeleitet worden sind. Entsprechend den dort getroffenen Konventionen wird das komplexe Element $\bar{y}_{ij}$ der Knotenadmittanzmatrix $\mathbf{Y}_k$ als $\bar{y}_{ij} = g_{ij} + j b_{ij}$ dargestellt (siehe dazu Gl. (2.4-18)).

Wirkleistung

$$P_i = \sum_{j=1}^n \{e_i(e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) + f_i(f_j g_{ij} + e_j b_{ij})\}$$

Blindleistung

(3.3-1)

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \{f_i(e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) - e_i(f_j g_{ij} + e_j b_{ij})\}.$$

Dabei geht der Index „ i “ von $1, 2, 3, \dots, n$; d. h. das nichtlineare Gleichungssystem (3.3-1) besteht somit aus $2n$ Gleichungen.

Im einfachsten Fall wird zunächst angenommen, daß mit Ausnahme des Referenzknotens in jedem Knoten die Nettoscheinleistung $\bar{S}_i = P_i + j Q_i$ vorgegeben ist und die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ gesucht werden. Damit sind $2(n-1)$ nichtlineare Gleichungen zu lösen.

Die NEWTON-RAPHSON-Methode erfordert die Aufstellung eines linearisierten Gleichungssystems, das den Zusammenhang zwischen Leistungs- und Spannungsänderungen beschreibt. Von Gl. (3.3-1) ausgehend erhält man in Analogie zu Gl. (3.2-22) folgendes linearisiertes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} J_1 = \partial P_i / \partial f_j & J_2 = \partial P_i / \partial e_j \\ J_3 = \partial Q_i / \partial f_j & J_4 = \partial Q_i / \partial e_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \\ \Delta e_1 \\ \vdots \\ \Delta e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} . \quad (3.3-2)$$

Die Berechnung der JACOBischen Matrix J bestehend aus vier Teilmatrizen

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \quad (3.3-3)$$

läßt sich mit Gl. (3.3-1) unmittelbar ausführen. Für die Teilmatrix J_1 gilt

a) für Elemente außerhalb der Diagonale

$$\partial P_i / \partial f_j = -e_i b_{ij} + f_i g_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ aber } i \neq j \quad (3.3-4)$$

b) für die Diagonalelemente

$$\partial P_i / \partial f_i = 2 f_i g_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.3-5)$$

Für die Teilmatrix J_2 gilt

a) für Elemente außerhalb der Diagonale

$$\partial P_i / \partial e_j = e_i g_{ij} + f_i b_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ aber } i \neq j \quad (3.3-6)$$

b) für die Diagonalelemente

$$\partial P_i / \partial e_i = 2 e_i g_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.3-7)$$

Für die Teilmatrix J_3 gilt

a) für Elemente außerhalb der Diagonale

$$\partial Q_i / \partial f_j = -e_i g_{ij} - f_i b_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ aber } i \neq j \quad (3.3-8)$$

b) für die Diagonalelemente

$$\partial Q_i / \partial f_i = -2 f_i b_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.3-9)$$

Für die Teilmatrix J_4 gilt

a) für Elemente außerhalb der Diagonale

$$\partial Q_i / \partial e_j = -e_i b_{ij} + f_i g_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{aber } i \neq j \quad (3.3-10)$$

b) für die Diagonalelemente

$$\partial Q_i / \partial e_i = -2 e_i b_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.3-11)$$

Bei der Anwendung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens auf die Lösung der nicht-linearen Netzgleichungen (3.3-1) ist zu beachten, daß im Referenzknoten mit $i = 1$ die Spannung U_1 nach Betrag und Phase vorgegeben ist. In der nach Gl. (3.3-3) definierten JACOBISCHEN Matrix J muß die erste Zeile und Spalte für die weitere Rechnung weggelassen werden, da wegen des Energieerhaltungssatzes J lineare Abhängigkeiten enthält. Die reduzierte Matrix wird mit J^k bezeichnet, wobei k der Iterationsschritt ist.

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren besteht nun aus folgenden Iterationsschritten. Für einen festen Startwert der Spannungen z. B.

$$\bar{U}_i^k = e_i^k + j f_i^k = 1,0 + j 0,0 \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad (3.3-12)$$

berechnet man die Leistungen P_i^k und Q_i^k mit Gl. (3.3-1). Die Änderungen der Leistungen ΔP_i^k und ΔQ_i^k ergeben sich als Differenz zwischen den vorgegebenen (P_i und Q_i) und gerechneten Werten P_i^k und Q_i^k

$$\Delta P_i^k = P_i - P_i^k \quad \text{und} \quad \Delta Q_i^k = Q_i - Q_i^k . \quad (3.3-13)$$

Da man die Elemente der JACOBISCHEN Matrix J^k mit den Spannungswerten $\bar{U}_i^k = e_i^k + j f_i^k$ entsprechend Gl. (3.3-4) bis (3.3-11) berechnen kann, kann das reduzierte Gleichungssystem (3.3-2) für gegebene Leistungsänderungen nach den Spannungsänderungen aufgelöst werden. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta e_2^k \\ \vdots \\ \Delta e_n^k \\ \Delta f_2^k \\ \vdots \\ \Delta f_n^k \end{bmatrix} = (J^k)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_2^k \\ \vdots \\ \Delta P_n^k \\ \Delta Q_2^k \\ \vdots \\ \Delta Q_n^k \end{bmatrix} . \quad (3.3-14)$$

Die neuen Spannungswerte ergeben sich nun zu

$$e_i^{k+1} = e_i^k + \Delta e_i^k \quad \text{und} \quad f_i^{k+1} = f_i^k + \Delta f_i^k . \quad (3.3-15)$$

Mit diesen verbesserten Werten ist das NEWTON-RAPHSON-Verfahren iterativ zu wiederholen, indem neue Leistungswerte P_i^{k+1} und Q_i^{k+1} aus Gl. (3.3-1) berechnet werden. Eingesetzt in Gl. (3.3-13) ergeben sich dadurch neue Leistungskorrekturen, aus denen mit Gl. (3.3-14) die verbesserten Spannungskorrekturen berechnet werden können. Das Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis die Leistungsänderungen ΔP_i^k und ΔQ_i^k in Gl. (3.3-13) kleiner als eine fest vorgewählte Konvergenzschranke werden.

Der entscheidende Schritt des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.3-2). Anstelle der in Gl. (3.3-14) gezeigten direkten Matri-

zeninversion sind die im ersten Kapitel behandelten numerisch effizienten Verfahren der Faktorisierung und optimalen Knotenordnung zu benutzen.

3.3.2 Spannungsgeregelte Knoten

Die bisherigen Ausführungen standen unter der Annahme, daß außer dem Referenzknoten nur Lastknoten ($P-Q$ Knoten) vorhanden sind. Um nun auch die spannungsgeregelten Knoten, die Kraftwerk- oder Netzeinspeisungen entsprechen, berücksichtigen zu können, ist daran zu erinnern, daß die Gl. (3.3-1) nur in den Lastknoten benutzt werden können. In den spannungsgeregelten Knoten gilt anstelle der Gl. (3.3-1)

$$P_i = \sum_{j=1}^n \{e_i (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) + f_i (f_j g_{ij} + e_j b_{ij})\} \quad (3.3-16)$$

$$U_i^2 = e_i^2 + f_i^2 .$$

Die Erweiterung des linearisierten Gleichungssystems (3.3-2) lautet nun

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta U^2 \end{bmatrix} . \quad (3.3-17)$$

Für die Teilmatrix J_5 gilt für $i \neq j$

$$\partial U_i^2 / \partial f_j = 0 \quad (3.3-18)$$

und für $i = j$

$$\partial U_i^2 / \partial f_i = 2 f_i . \quad (3.3-19)$$

Für die Teilmatrix J_6 gilt für $i \neq j$

$$\partial U_i^2 / \partial e_j = 0 \quad (3.3-20)$$

und für $i = j$

$$\partial U_i^2 / \partial e_i = 2 e_i . \quad (3.3-21)$$

Sind in einem Netz mit n Knoten n_G Einspeisungen (ohne den Referenzknoten zu zählen) vorhanden, so haben die Teilmatrizen J_1 bis J_6 folgende Dimensionen.

$$\dim J_1 = \dim J_2 = (n-1), (n-1)$$

$$\dim J_3 = \dim J_4 = (n - n_G - 1), (n-1)$$

$$\dim J_5 = \dim J_6 = (n_G), (n-1) .$$

Für die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.3-17) ist die rechte Seite durch die Leistungsdifferenzen (3.3-13) sowie die Spannungsdifferenzen

$$(\Delta U_i^k)^2 = U_i^2 - (U_i^k)^2 \quad (3.3-22)$$

gegeben. Dabei ist U_i^2 in den spannungsgeregelten Knoten fest vorgegeben. Die Lösung von Gl. (3.3-17) bestimmt die Korrekturen Δe^k und Δf^k , die für die Berechnung der verbesserten Spannungswerte benötigt werden.

Es ist zu beachten, daß nach jeder Iteration die Blindleistungen Q_i in den spannungsgeregelten Knoten berechnet werden müssen, wobei Gl. (3.3-1) zu benutzen ist. Falls die dabei erhaltenen Werte die Ungleichung

$$Q_{i,\min} \leq Q_i \leq Q_{i,\max} \quad (3.3-23)$$

nicht erfüllen, muß der bisher als spannungsgeregelte Knoten in einen Lastknoten umgewandelt werden, wobei für Q_i die untere oder die obere Grenze eingesetzt werden muß. Technisch beschreibt diese Ungleichung die Tatsache, daß die für die Spannungshaltung erforderliche Blindleistung nur innerhalb fester Grenzen zur Verfügung steht. Sobald der Wechsel vom spannungsgeregelten zum Lastknoten erforderlich wird, muß die entsprechende Zeile der JACOBISCHEN Matrix neu aufgestellt werden und die für die Matrizeninversion erforderliche Faktorisierung wiederholt werden.

Sobald man die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ in den Lastknoten sowie den Spannungswinkel δ_i und die Blindleistung Q_i in den spannungsgeregelten Knoten kennt, lassen sich alle Leistungsflüsse im Netz mit Hilfe der Gl. (3.1-1) und (3.1-2) berechnen.

Abschließend ist noch darauf hinzuweisen, daß die Beschreibung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens hier mit Hilfe der kartesischen Koordinaten durchgeführt worden ist. In dieser Darstellung treten im Gegensatz zur Polarkoordinaten-Formulierung keine trigonometrischen Ausdrücke im linearisierten Gleichungssystem auf.

3.4 Beispiel

In Kapitel 2 ist das in Bild 3.4-1 gezeigte, dreiknotige Netz benutzt worden, um die stationären Netzgleichungen in kartesischen Koordinaten aufzustellen. Auf diese Gleichungen

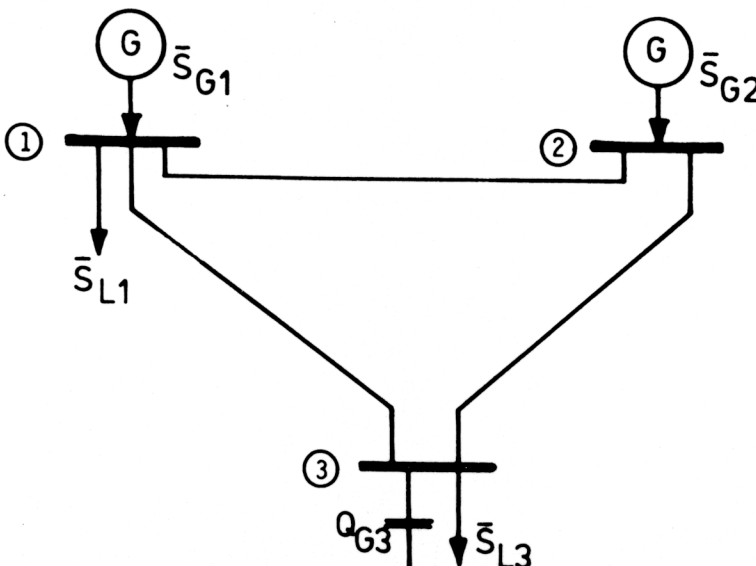


Bild 3.4-1 Dreiknotiges Testnetz zur Illustration des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zur Lösung der Netzgleichungen

chungen (2.6-10) für die Wirkleistung und (2.6-11) für die Blindleistung wird nun zurückgegriffen, um mit deren Hilfe hier die Anwendung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zu zeigen. Mit den in Bild 3.4-1 vorgegebenen Zahlenwerten lauten die Netzgleichungen

$$\begin{aligned}
 P_1 &= -0,5 = -10 f_2 - 10 f_3 \\
 P_2 &= 1,5 = -10 e_2 f_3 + 10 f_2 + 10 e_3 f_2 \\
 P_3 &= -1,0 = -10 e_3 f_2 + 10 f_3 + 10 e_2 f_3 \\
 Q_1 &= ? = 20 - 10 e_2 - 10 e_3 \quad (3.4-1) \\
 Q_2 &= ? = -10 e_2 + 20 - 10 e_2 e_3 - 10 f_2 f_3 \\
 Q_3 &= -1,0 = 20 e_3^2 - 10 e_2 e_3 - 10 f_2 f_3 + 20 f_3^2 - 10 e_3 \\
 U_2^2 &= 1,0 = e_2^2 + f_2^2
 \end{aligned}$$

Zahlenwerte

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_1 &= 1,0/0^\circ \quad \bar{U}_2 = 1,0/? \quad \bar{U}_3 = ?/? \\
 \bar{S}_{G1} &= ? \quad \bar{S}_{L1} = 1,0 + j 0,5 \\
 \bar{S}_{G2} &= 1,5 + j ? \quad \bar{S}_{L2} = 0 + j 0 \\
 \bar{S}_{G3} &= 0 + j 0 \quad \bar{S}_{L3} + j Q_{G3} = 1,0 + j 1,0
 \end{aligned}$$

Die Impedanzen der Leitungen sind alle gleich groß und betragen

$$\bar{Z}_{li} = 0,0 + j 0,1 \quad .$$

Alle Größen sind in bezogener Darstellung: $U_B = 220 \text{ kV}$, $S_B = 100 \text{ MVA}$.

Da keine ohmschen Netzverluste berücksichtigt werden, konnte in der Netzgleichung (3.4-1) für die Wirkleistung in Knoten 1 von der Bilanz über das ganze Netz Gebrauch gemacht werden

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0; \quad \text{d. h. } P_1 = -0,5 \quad .$$

Zur Vorbereitung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist zunächst die JACOBISCHE Matrix mit Gl. (3.3-3) aufzustellen. Für die Teilmatrix J_1 gilt mit Gl. (3.3-4) und (3.3-5)

$$J_1 = \begin{bmatrix} 10 + 10 e_3 & -10 e_2 \\ -10 e_3 & 10 + 10 e_2 \end{bmatrix} \quad (3.4-2)$$

Für die Teilmatrix J_2 gilt mit Gl. (3.3-6) und (3.3-7)

$$J_2 = \begin{bmatrix} -10 f_3 & 10 f_2 \\ 10 f_3 & -10 f_2 \end{bmatrix} \quad (3.4-3)$$

Die Teilmatrix J_3 besteht nur aus einer Zeile gemäß Gl. (3.3-8) und (3.3-9), da der Knoten 2 ein spannungsgeregelter Knoten einer Kraftwerkseinspeisung ist.

$$J_3 = [-10 f_3 \quad -10 f_2 + 40 f_3] . \quad (3.4-4)$$

Ebenso ist die Teilmatrix J_4 auch nur ein Zeilenvektor gemäß Gl. (3.3-10) und (3.3-11)

$$J_4 = [-10 e_3 \quad 40 e_3 - 10 e_2 - 10] . \quad (3.4-5)$$

Die Teilmatrix J_5 lautet wegen Gl. (3.3-18) und (3.3-19)

$$J_5 = [2 f_2 \quad 0] . \quad (3.4-6)$$

Die Teilmatrix J_6 lautet wegen Gl. (3.3-20) und (3.3-21)

$$J_6 = [2 e_2 \quad 0] . \quad (3.4-7)$$

Insgesamt lautet somit das lineare Gleichungssystem (3.3-17) für das dreiknotige Testnetz

$$\begin{bmatrix} 10 + 10 e_3 & -10 e_3 & -10 f_3 & 10 f_2 \\ -10 e_3 & 10 e_2 + 10 & 10 f_3 & -10 f_2 \\ -10 f_3 & 40 f_3 - 10 f_2 & -10 e_3 & 40 e_3 - 10 e_2 - 10 \\ 2 f_2 & 0 & 2 e_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \\ \Delta e_3 \\ \Delta e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta U_2^2 \end{bmatrix} . \quad (3.4-8)$$

Es ist zu beachten, daß hier im Gegensatz zum allgemeinen Ausdruck (3.3-17) die Zeile der Spannungskorrektur an die Stelle der fiktiven Blindleistungsänderung ΔQ_2 geschrieben wird.

Mit den Startwerten $e_i = 1,0$ und $f_i = 0,0$ erhält man für die erste Iteration

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta f_2^1 \\ \Delta f_3^1 \\ \Delta e_2^1 \\ \Delta e_3^1 \end{bmatrix} &= J^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_2^1 \\ \Delta P_3^1 \\ (\Delta U_2^1)^2 \\ \Delta Q_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,06 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,0 \\ 0,0 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,066 \\ -0,016 \\ 0 \\ -0,05 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (3.4-9)$$

Daraus ergeben sich für die verbesserten Spannungswerte

$$\begin{aligned} f_2^2 &= f_2^1 + \Delta f_2^1 = 0 + 0,066 = 0,066 \\ f_3^2 &= f_3^1 + \Delta f_3^1 = 0 - 0,016 = -0,016 . \\ e_2^2 &= e_2^1 + \Delta e_2^1 = 1 + 0 = 1,0 \\ e_3^2 &= e_3^1 + \Delta e_3^1 = 1 - 0,05 = 0,95 \end{aligned} \quad (3.4-10)$$

Damit lassen sich die Knotenleistungen sowie die Spannungen in Knoten 2 mit Gl. (3.4-1) erneut für die zweite Iteration berechnen. (Der hochgestellte Index „2“ gibt an, daß es sich nun um die zweite Iteration handelt.)

$$P_2^2 = 1,46 \quad P_3^2 = -0,966 \quad Q_3^2 = -0,933 \quad (3.4-11)$$

Der verbesserte Spannungswert lautet nun für Knoten 2

$$(U_2^2)^2 = 1,0044 \quad (3.4-12)$$

Die Korrekturterme ergeben sich bei vorgegebenen Sollwerten entsprechend

$$\begin{aligned} \Delta P_2^2 &= P_2 - P_2^2 = 1,5 - 1,466 = 0,033 \\ \Delta P_3^2 &= P_3 - P_3^2 = -1,0 + 0,966 = -0,033 \\ \Delta Q_3^2 &= Q_3 - Q_3^2 = -1,0 + 0,933 = -0,066 \\ (\Delta U_2^2)^2 &= \{(U_2)^2 - (U_2^2)^2\} = 1,0 - 1,0044 = -0,0044 \end{aligned} \quad (3.4-13)$$

Berechnet man die JACOBISCHE Matrix J mit den aus der ersten Iteration resultierenden Spannungswerten, erhält man für die zweite Iteration

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta f_2^2 \\ \Delta f_3^2 \\ \Delta e_2^2 \\ \Delta e_3^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 19,5 & -9,5 & 0,1666 & 0,66 \\ -9,5 & 20 & -0,166 & -0,66 \\ 0,133 & 0 & 2 & 0 \\ 0,166 & -1,3 & -9,5 & 18 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,033 \\ -0,033 \\ -0,0044 \\ -0,066 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,068 & 0,034 & -0,0088 & -0,0126 \\ 0,032 & 0,066 & 0,0088 & 0,0126 \\ -0,0045 & -0,0023 & 0,501 & 0,00008 \\ -0,0006 & 0,0034 & 0,265 & 0,0557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,033 \\ -0,033 \\ -0,0044 \\ -0,066 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,0014 \\ -0,0014 \\ -0,0112 \\ -0,0097 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4-14)$$

Damit erhält man nach der zweiten Iteration folgende Spannungswerte

$$\begin{aligned} f_2^3 &= f_2^2 + \Delta f_2^2 = 0,066 + 0,0014 = 0,0681 \\ f_3^3 &= f_3^2 + \Delta f_3^2 = -0,016 - 0,0014 = -0,0181 \\ e_2^3 &= e_2^2 + \Delta e_2^2 = 1,0 - 0,0112 = 0,9889 \\ e_3^3 &= e_3^2 + \Delta e_3^2 = 0,95 - 0,0097 = 0,9403 \end{aligned} \quad (3.4-15)$$

Damit lassen sich die Knotenleistungen erneut berechnen

$$P_2^3 = 1,49957 \quad P_3^3 = -0,99959 \quad Q_3^3 = -0,99211 \quad (3.4-16)$$

Der verbesserte Spannungswert in Knoten 2 lautet

$$(U_2^3)^2 = 0,9809 \text{ .}$$

Vergleicht man diese Werte mit den vorgegebenen Leistungs- und Spannungswerten, so stellt man fest, daß nach zwei NEWTON-RAPHSON-Iterationen das Ergebnis mit einer Genauigkeit von etwa 2% erhalten wird.

Zusammenfassend lautet nun das Ergebnis der Netzberechnung (siehe auch Tabelle 2+3)

Knoten Nr.	Einspeisung		Last		Spannung	
	P_G	Q_G	P_L	Q_L	U	δ
1	0,50	1,07	1,0	0,5	1,0	0,0
2	1,50	0,61	0,0	0,0	1,0	3,9°
3	0,0	0,0	1,0	1,0	0,945	-1,1°

Aufgaben

Aufgabe 3.1

Für das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x, y) = x^2 + 2y - 3 = 0 \text{ .}$$

$$g(x, y) = xy - 3y^2 + 2 = 0$$

ist die Lösung (x, y) mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zu bestimmen. Als Startwerte verwende man $x^0 = 3$ und $y^0 = 2$.

Aufgabe 3.2

Wie lautet die Berechnung der JACOBischen Matrix J , wenn die Netzgleichungen in der Polarkoordinatendarstellung benutzt werden?

Aufgabe 3.3

Der Wirk- und Blindleistungsfluß $P_{ij} + jQ_{ij}$ ist mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung und anschließend mit Hilfe der kartesischen Koordinaten-Darstellung zu bestimmen.

Aufgabe 3.4

Für eine Leitung mit der Längsadmittanz $\bar{Y}_0 = -j10$ wird die Spannung am Leitungsanfang als Referenzspannung $\bar{U}_1 = 1,0/0^\circ$ gesetzt. Gesucht ist der Spannungswinkel δ_2 der komplexen Knotenspannung $\bar{U}_2$ am Leitungsende sowie der Blindleistungsbedarf Q_2 , um bei variabler Wirklast P_{L2} im Bereich von $0 \leq P_{L2} \leq 2,0$ den Spannungsbetrag U_2 auf den Werten 0,9, 1,0 und 1,1 halten zu können.

4 Schnelle, entkoppelte Lastflußberechnung

4.1 Einleitung

In den bisherigen Überlegungen zur Lösung der nichtlinearen Lastflußgleichungen sind zwei Eigenschaften der Netzgleichungen ausgenutzt worden:

- a) Schwachbesetztheit der JACOBischen Matrix J
- b) Optimale Ordnung der Knoten für den Aufbau der JACOBischen Matrix J .

Die Berücksichtigung dieser beiden Eigenschaften führt zu einem numerisch bereits recht effizienten Matrizeninversionsverfahren. In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Ausnutzung der stationär nur schwach gekoppelten Wirk- und Blindleistungsbeziehungen zu einer weiteren Steigerung der numerischen Effizienz des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens führen. Inhaltlich wird im folgenden auf die in Kapitel 2 behandelten Netzgleichungen eingegangen. Es soll hier gezeigt werden, wie die durch physikalische Eigenschaften bedingte relative Unabhängigkeit zwischen den Wirk- und Blindleistungsbeziehungen ausgenutzt werden kann, um das NEWTON-RAPHSON-Verfahren numerisch in kürzester Rechenzeit durchführen zu können.

Die Thematik der schnellen, entkoppelten Lastflußberechnung hat im Hinblick auf den praktischen Einsatz eine große Bedeutung, so daß ein grundsätzliches Verständnis des Verfahrens als sehr wichtig angesehen wird.

4.2 Kopplung zwischen den Wirk- und Blindleistungsbeziehungen

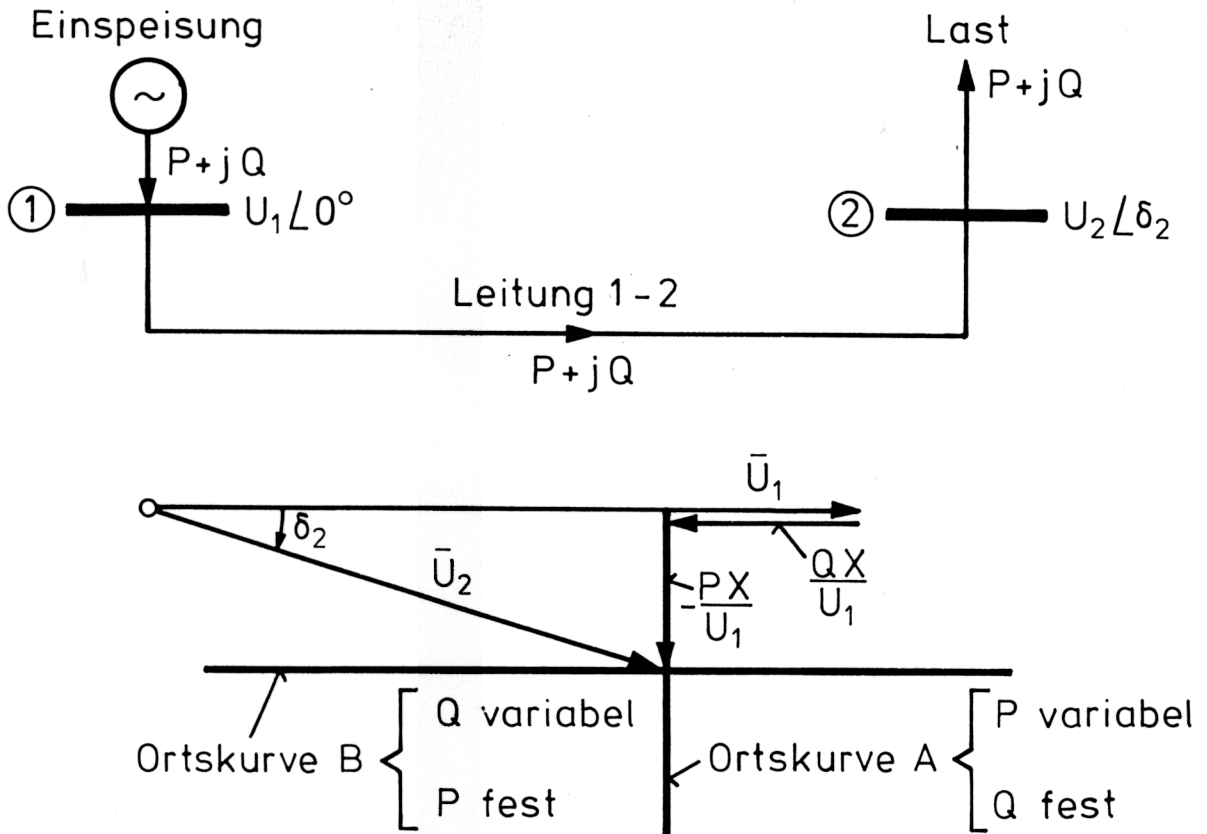
In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Wirkleistungen und die Spannungswinkel einerseits sowie die Blindleistungen und Spannungsbeträge andererseits untereinander relativ schwach gekoppelt sind. Dazu wird von dem in Bild 4.2-1 gezeigten zweiknotigen Netz ausgegangen, das unter folgenden Annahmen für eine Netzberechnung benutzt wird:

- Der Spannungsbetrag U_1 im Referenzknoten 1 ist konstant.
- Die Leitungsimpedanz ist rein induktiv, d. h. $\bar{Z} = jX$.
- Der Leistungsfluß $P + jQ$ sei am Leitungsanfang und -ende gleich groß. Dies gilt für die Wirkleistung exakt, da die ohmschen Leitungsverluste nicht berücksichtigt werden. Für die Blindleistung ist die Annahme näherungsweise richtig. Diese Annahme gilt nur in diesem Abschnitt 4.2.

Gesucht ist der Verlauf der komplexen Spannung $\bar{U}_2$ in Abhängigkeit der in Knoten 2 sich ändernden Wirk- und Blindleistung $P + jQ$.

Allgemein gilt für die Spannung in Knoten 2

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 - \bar{I}\bar{Z} , \quad (4.2-1)$$

Bild 4.2-1 Zweiknotiges Testnetz mit Zeigerdiagramm und Ortskurven für $P = \text{konst}$ resp. $Q = \text{konst}$

wobei die Leistung $P + jQ$ näherungsweise durch

$$\bar{S}^* = P - jQ \approx \bar{U}_1^* \bar{I} \quad (4.2-2)$$

gegeben ist. Setzt man den Leitungsstrom $\bar{I}$ in Gl. (4.2-1) ein, so gilt

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 - (P - jQ) \frac{\bar{Z}}{\bar{U}_1^*} \quad (4.2-3)$$

Aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil der Spannung $\bar{U}_2 = e_2 + j f_2$ erhält man aus Gl. (4.2-3) unter Berücksichtigung, daß $\bar{U}_1 = U_1$ die Referenzspannung ist,

$$\bar{U}_2 = e_2 + j f_2 = U_1 - (P - jQ) \frac{jX}{U_1} \quad (4.2-4)$$

$$e_2 = U_1 - Q \frac{X}{U_1} \quad (4.2-5)$$

$$f_2 = -P \frac{X}{U_1} \quad (4.2-6)$$

In Bild 4.2-1 ist das Zeigerdiagramm der beiden Knotenspannungen $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ dargestellt. Solange die Wirkleistung P bei konstanter Blindleistung Q variiert wird, bewegt sich die Zeigerspitze von $\bar{U}_2$ auf der Ortskurve A. Der Verlauf von A zeigt deut-

lich, daß die Wirkleistungsänderungen zu einer wesentlichen Veränderung des Spannungswinkels δ_2 , nicht jedoch des Spannungsbetrages U_2 führt.

Wenn man nun die Blindleistung Q bei konstanter Wirkleistung P verändert, so erhält man die Ortskurve B für die komplexe Spannung $\bar{U}_2$. Es wird deutlich, daß die Veränderung von Q somit zu einer starken Beeinflussung des Spannungsbetrages U_2 , jedoch nur zu einer geringen Beeinflussung des Spannungswinkels δ_2 führt.

Das hier behandelte, einfache Beispiel veranschaulicht die stationäre Entkopplung zwischen der Wirkleistung und der Blindleistung. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie diese physikalische Eigenschaft beim Aufstellen des NEWTON-RAPHSON-Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Netzgleichungen ausgenutzt werden kann.

4.3 Stationäres Netzmodell in Polarkoordinaten

Um die Entkopplung zwischen Wirkleistung und Spannungswinkel einerseits und Blindleistung und Spannungsbetrag andererseits zu verdeutlichen, wird im folgenden die Darstellung der Netzgleichungen in Polarkoordinaten benutzt. Dabei gilt für die komplexe Knotenspannung, wie bereits in Kapitel 2 eingeführt,

$$\bar{U}_i = U_i \exp(j \delta_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3-1)$$

wobei U_i der Spannungsbetrag und δ_i der Spannungswinkel ist. n bezeichnet die Anzahl der Netzknoten. In Abschnitt 2.4.3 sind die stationären Netzgleichungen in Polarkoordinaten abgeleitet worden. Der Vollständigkeit halber werden sie hier noch einmal wiederholt

$$P_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) \quad (4.3-2)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) .$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß $y_{ij} < \theta_{ij}$ die komplexen Elemente der Knotenadmittanzmatrix Y_k darstellen. Die Diagonalelemente $\bar{y}_{ii}$ enthalten die Längs- und Queradmittanzen der Netzelemente; $\bar{y}_{ij}$ ist durch den negativen Wert der Netzadmittanz zwischen den Knoten i und j gegeben.

Bezeichnet man den Referenzknoten wiederum mit 1, so erhält man unter Beachtung der linearen Abhängigkeiten innerhalb der JACOBischen Matrix J nach Weglassen der ersten Spalte und Zeile von J in Analogie zu Gl. (3.3-2) folgendes, linearisiertes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial P_2 / \partial \delta_2 \cdots \partial P_2 / \partial \delta_n & \partial P_2 / \partial U_2 \cdots \partial P_2 / \partial U_n \\ \vdots & \vdots \\ \partial P_n / \partial \delta_2 \cdots \partial P_n / \partial \delta_n & \partial P_n / \partial U_2 \cdots \partial P_n / \partial U_n \\ \hline \partial Q_2 / \partial \delta_2 \cdots \partial Q_2 / \partial \delta_n & \partial Q_2 / \partial U_2 \cdots \partial Q_2 / \partial U_n \\ \vdots & \vdots \\ \partial Q_n / \partial \delta_2 \cdots \partial Q_n / \partial \delta_n & \partial Q_n / \partial U_2 \cdots \partial Q_n / \partial U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} . \quad (4.3-3)$$

Die vereinfachte Schreibweise mit den in Gl. (4.3-3) angegebenen Teilmatrizen lautet somit

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{bmatrix}. \quad (4.3-4)$$

Die Elemente der JACOBISCHEN Teilmatrizen H , N , M und L sind für die Polarkoordinaten-Darstellung bereits in der Übung 3.2 zu Kapitel 3 berechnet worden. Sie lassen sich unmittelbar aus Gl. (4.3-2) berechnen. Die Elemente h_{ij} der Teilmatrix H lauten außerhalb der Diagonalen

$$h_{ij} = \partial P_i / \partial \delta_j = U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-5)$$

Die Diagonalelemente h_{ii} von H lauten

$$h_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-6)$$

Die Elemente n_{ij} der Teilmatrix N lauten außerhalb der Diagonalen

$$n_{ij} = U_i y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-7)$$

Für die Diagonalelemente gilt

$$n_{ii} = 2 U_i y_{ii} \cos \theta_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-8)$$

Die Elemente m_{ij} der Teilmatrix M lauten außerhalb der Diagonalen

$$m_{ij} = - U_i U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-9)$$

Für die Diagonalelemente gilt

$$m_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-10)$$

Die Elemente l_{ij} der Teilmatrix L lauten außerhalb der Diagonalen nach Multiplikation mit U_j

$$\tilde{l}_{ij} = U_j l_{ij} = U_j \partial Q_i / \partial U_j = U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-11)$$

Für die Diagonalelemente l_{ii} gilt nach Multiplikation mit U_i

$$\tilde{l}_{ii} = U_i l_{ii} = U_i \partial Q_i / \partial U_i = 2 U_i^2 y_{ii} \sin(-\theta_{ii}) + U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) . \quad (4.3-12)$$

Um die Größenordnung der verschiedenen Matrizenwerte in den Gleichungen (4.3-5) bis (4.3-12) zu verdeutlichen und eine Entkopplung zwischen den Wirkleistungs- und Blindleistungsbeziehungen zu erhalten, werden für die weiteren Ausführungen folgende Annahmen getroffen:

- Der ohmsche Anteil R_{ij} der komplexen Leitungs-Längsimpedanz $\bar{Z}_{ij} = R_{ij} + j X_{ij}$, die zwischen den Knoten i und j liegt, kann in Hochspannungsfreileitungen vernachlässigt werden. Dadurch gilt für die Elemente $\bar{y}_{ij}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k außerhalb der Diagonale

$$\bar{y}_{ij} = -\bar{Y}_{ij} = -1/\bar{Z}_{ij} = y_{ij}/90^\circ \quad (4.3-13)$$

Dabei entspricht der Wert y_{ij} der Leitungssuszeptanz $B_{ij} = 1/X_{ij}$.

- Bei den Diagonalelementen $\bar{y}_{ii}$ der Knotenadmittanzmatrix Y_k ist zu beachten, daß sie als Summe aller von Knoten i ausgehenden Admittanzen zu bilden sind. Da man in Hochspannungsfreileitungsnetzen die Wirkanteile der Queradmittanzen vernachlässigen kann, ohne einen nennenswerten Fehler zu machen, sind die Elemente $\bar{y}_{ii}$ rein imaginäre Größen

$$\bar{y}_{ii} = y_{ii}/\pm 90^\circ \quad (4.3-14)$$

wobei das Vorzeichen des Winkels davon abhängt, ob der induktive Anteil (– Zeichen) oder der kapazitive Anteil (+ Zeichen) überwiegt.

- Die Differenzen der Spannungswinkel

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j \quad (4.3-15)$$

sind aus betrieblichen Gründen klein, so daß die Approximationen

$$\sin \delta_{ij} \approx \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \cos \delta_{ij} \approx 1 \quad (4.3-16)$$

benutzt werden können.

Damit lauten die Elemente der Teilmatrizen H , N , M und L unter Ausnutzung der Beziehungen $\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$ und $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$ sowie der Gl. (4.3-14)

$$h_{ij} = U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_{ij} - 90^\circ) = -U_i U_j y_{ij} \quad (4.3-17)$$

$$h_{ii} = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \quad (4.3-18)$$

$$n_{ij} = U_i y_{ij} \delta_{ij} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } h_{ij} \quad (4.3-19)$$

$$n_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \delta_{ij} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } h_{ii} \quad (4.3-20)$$

$$m_{ij} = -U_i U_j y_{ij} \delta_{ij} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } \tilde{l}_{ij} \quad (4.3-21)$$

$$m_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_i U_j y_{ij} \delta_{ij} \approx 0 \quad \text{im Vergleich zu } \tilde{l}_{ii} \quad (4.3-22)$$

$$\tilde{l}_{ij} = h_{ij} = -U_j U_i y_{ij} \quad (4.3-23)$$

$$\tilde{l}_{ii} = -2 U_i^2 y_{ii} - U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} . \quad (4.3-24)$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gl. (4.3-3) ein, so erhält man folgendes, zwischen Wirk- und Blindleistung entkoppeltes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} H & O \\ O & \tilde{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U/U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} . \quad (4.3-25)$$

Dabei ist die Teilmatrix H wie folgt aufgebaut

$$H = \begin{bmatrix} h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & h_{ii} & \vdots \\ h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} . \quad (4.3-26)$$

Die Teilmatrix $\tilde{L}$ des Blindleistungsmodells hat die Form

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & l_{ii} & \vdots \\ l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} . \quad (4.3-27)$$

Wie bereits in Gl. (4.3-12) eingeführt, ist es zweckmäßig, anstelle von l_{ij} die Größe $\tilde{l}_{ij}$ zu benutzen, die man durch Multiplikation mit U_j erhält. Dadurch stimmen die Teilmatrizen H und $\tilde{L}$ bis auf die Diagonalelemente überein. Dazu ist es erforderlich, anstelle des Spannungsvektors ΔU den Vektor $\Delta U/U$ zu benutzen. Seine Definition lautet

$$\Delta U/U = \begin{bmatrix} \Delta U_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_n/U_n \end{bmatrix} . \quad (4.3-28)$$

Es ist nun darauf hinzuweisen, daß die Elemente der Teilmatrizen H und $\tilde{L}$ von den zunächst noch unbekannten Spannungen U_i abhängig sind.

Für die weitere Vorgehensweise wird die physikalische Eigenschaft verwendet, daß die Spannungsbeträge U_i in allen Netzknoten etwa gleich groß sind. Damit lassen sich die Elemente von H und $\tilde{L}$ näherungsweise berechnen.

$$h_{ii} = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \approx U_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} \quad (4.3-29)$$

$$h_{ij} = \tilde{l}_{ij} = -U_i U_j y_{ij} \approx -U_i^2 y_{ij} \quad (4.3-30)$$

$$\tilde{l}_{ii} = -2 U_i^2 y_{ii} - U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j y_{ij} \approx -2 U_i^2 y_{ii} - U_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} . \quad (4.3-31)$$

Führt man nun die Diagonalmatrix U entsprechend der folgenden Definition ein

$$\text{diag } U = \begin{bmatrix} U_2 & & \\ & U_3 & \\ & & \ddots \\ & & & U_n \end{bmatrix}, \quad (4.3-32)$$

so lassen sich aus H und $\tilde{L}$ zwei Koeffizientenmatrizen B' und B'' angeben. Sie werden die Systemmatrizen des Wirk- und des Blindmodells genannt. Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß aufgrund der obigen Näherungen die beiden Systemmatrizen B' und B'' konstante, von $\bar{U}_i$ unabhängige Parameter aufweisen.

$$B' = \begin{bmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n y_{2j} & -y_{23} & -y_{2n} \\ -y_{23} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n y_{3j} & -y_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{2n} & -y_{3n} & \sum_{j=1}^{n-1} y_{nj} \end{bmatrix} \quad (4.3-33 a)$$

$$B'' = \begin{bmatrix} -2 y_{22} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n y_{2j} & -y_{23} & \dots & -y_{2n} \\ -y_{23} & -2 y_{33} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n y_{3j} & & -y_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -y_{2n} & -y_{3n} & -2 y_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} y_{nj} \end{bmatrix}. \quad (4.3-33 b)$$

Unter Verwendung der Gln. (4.3-32) und (4.3-33) lauten somit die entkoppelten Lastflußgleichungen (4.3-25) für das Wirkleistungsmodell

$$B' \Delta \delta = (\text{diag } U)^{-2} \Delta P \quad (4.3-34)$$

und für das Blindleistungsmodell

$$B'' \Delta U/U = (\text{diag } U)^{-2} \Delta Q. \quad (4.3-35)$$

Anstelle von Gl. (4.3-3) erhält man nun zwei lineare Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

4.4 Diskussion

Es ist zunächst festzuhalten, daß B' und B'' für praktische Anwendungen schwach besetzte Matrizen mit konstanten Koeffizienten sind. Sowohl B' und B'' haben dieselbe Besetzungsstruktur. Die numerischen Koeffizientenwerte sind durch die Werte der Knotenadmittanzmatrix Y_k gegeben.

Vergleicht man die entkoppelten Lastflußgleichungen (4.3-34) und (4.3-35) mit dem in Kapitel 3 behandelten vollständigen NEWTON-RAPHSON-Modell, so sind folgende Gesichtspunkte maßgebend.

Durch die Entkopplung der beiden Gleichungssysteme für die Wirk- und Blindleistung wird die Dimension der Systemmatrizen B' und B'' halbiert.

Die Systemmatrizen B' und B'' enthalten nur konstante Koeffizienten, so daß die Faktorisierung nur wegen der sich im Laufe der Iteration verändernden rechten Seite des Gleichungssystems wiederholt werden muß. Dies ist – wie in Kapitel 1 ausgeführt – verglichen mit der vollständigen Faktorisierung mit geringem Aufwand möglich.

Die konsequente Anwendung des Entkopplungsprinzips verlangt, daß all diejenigen Netzelemente, die das Blindleistungs-Spannungs-Modell beeinflussen, bei der Berechnung von B' weggelassen werden sollen; z. B. Kompensations-Drosseln oder Transformatoren mit Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} \neq 1$. In ähnlicher Weise sollen phasendrehende Transformatoren (Querregler) nicht in die Berechnung von B'' aufgenommen werden. Unter Beachtung dieser Punkte ist B' und B'' immer symmetrisch.

4.5 Iterationsverfahren

Die wechselseitige iterative Lösung der entkoppelten Gleichungssysteme (4.3-34) und (4.3-35) unter Verwendung der aktuellen Spannungswerte führt zu sehr kurzen Rechenzeiten. Pro Iterationszyklus erhält man die Spannungswinkelabweichungen $\Delta\delta$ bei der Auflösung des Wirkleistungsmodells (4.3-34) und die bezogenen Spannungsbetragsabweichungen $\Delta U/U$ nach der Lösung des Blindleistungsmodells (4.3-35). Man spricht dabei von zwei Halbiterationen.

In jeder Halbiteration werden die jeweils aktuellen Knotenspannungen für die Berechnung der rechten Seite eingesetzt, wodurch eine Kopplung zwischen den beiden Gleichungssystemen (4.3-34) und (4.3-35) erreicht wird. Die Konvergenz wird separat für jedes Teilmodell einzeln überwacht. Bild 4.5-1 zeigt das Flußdiagramm für die Durchführung der entkoppelten Lastflußberechnung. Dabei sind die beiden binären Größen p und q , die nur die Werte 0 und 1 annehmen, für die Konvergenzkontrolle erforderlich.

Für die Erläuterung des Iterationsverfahrens wird zunächst angenommen, daß der Knoten 1 der Referenzknoten und alle übrigen Knoten als $P-Q$ -Knoten betrachtet werden können. Demzufolge kennt man in allen Netzknoten $i = 2, 3, \dots, n$ die Nettowirk- und -blindleistungen P_i resp. Q_i . Ausgehend von festen Startwerten für die $n-1$ komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i^0$ mit $i = 2, 3, \dots, n$ werden zunächst mit Gl. (4.3-2) die sich daraus ergebenden Knotenwirkleistungen P_i^0 berechnet. Daraus bestimmt man die Abweichungen ΔP_i^0 mit

$$\Delta P_i^0 = P_i - P_i^0 . \quad (4.5-1)$$

Falls der Konvergenztest für den größten aller ΔP_i^0 Fehler, d. h.

$$\max |\Delta P_i^0| < \varepsilon_P , \quad (4.5-2)$$

noch nicht erfüllt ist, wird das $P-\delta$ -Modell mit der bereits faktorisierten Matrix B' nach $\Delta\delta$ aufgelöst und die so erhaltenen Spannungswinkel-Änderungen zur Verbesserung wie folgt verwendet

$$\delta^1 = \delta^0 + \Delta\delta^0 . \quad (4.5-3)$$

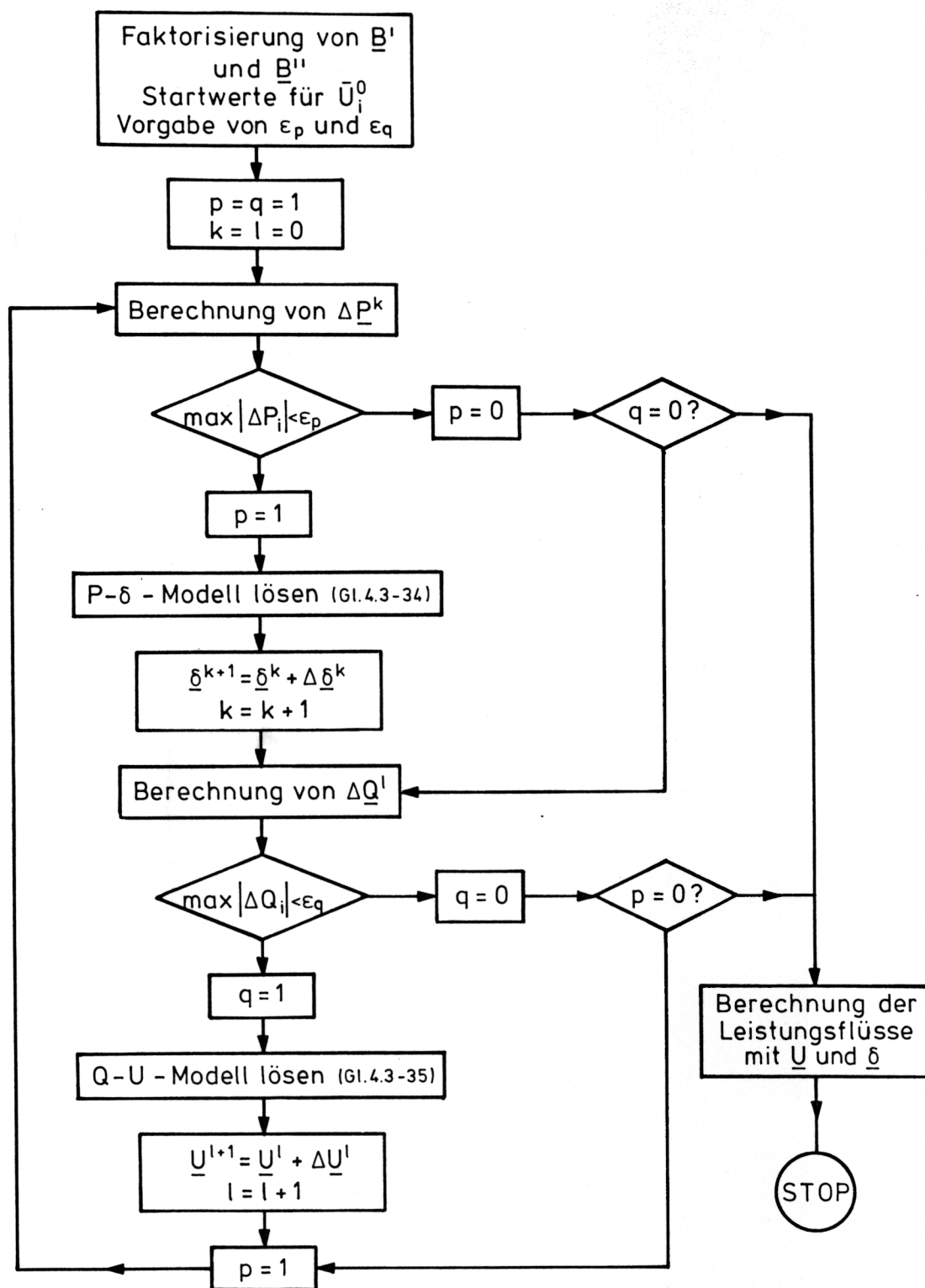


Bild 4.5-1 Flußdiagramm für das entkoppelte Lastflußverfahren basierend auf der NEWTON-RAPHSON-Methode

Dabei ist gleichzeitig der Iterationszähler k , der als hochgestellter Index verwendet wird, um eins erhöht worden. Danach ist die erste Halbiteration abgeschlossen.

Mit den bereits verbesserten Spannungswinkeln δ werden nun die Blindleistungen Q_i entsprechend

$$\Delta Q_i^0 = Q_i - Q_i^0 \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad (4.5-4)$$

berechnet, wobei Q_i^0 mit Gl. (4.3-2) berechnet wird. Ist der zugehörige Blindleistungs-Konvergenztest, der für den größten ΔQ_i^0 -Fehler d. h.

$$\max |\Delta Q_i^0| < \varepsilon_Q, \quad (4.5-5)$$

noch nicht erfüllt, wird das Q - U -Modell mit der bereits faktorisierten Matrix B'' nach $\Delta U/U$ aufgelöst und die so erhaltenen Spannungsbetragsänderungen zur Verbesserung der Spannungsbeträge entsprechend

$$U^1 = U^0 + \Delta U^0 \quad (4.5-6)$$

benutzt. Dabei wird der Iterationszähler l des Blindmodells um eins erhöht. Damit ist die zweite Halbiteration abgeschlossen.

Wenn beide Konvergenztests (4.5-2) und (4.5-5) erfüllt sind, wird der Lösungsalgorithmus abgebrochen. Die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ erlauben die Berechnung aller Leitungsflüsse, bevor das Verfahren abgeschlossen wird.

Die bisherige Diskussion der entkoppelten Lastflußberechnung basiert auf der Annahme, daß alle Knoten vom Typ P - Q Knoten sind. Im folgenden wird gezeigt, daß die Berücksichtigung der spannungsgeregelten P - U -Knoten keine neuen Probleme bringt. Lediglich die Matrix B'' muß in der Dimension um die Anzahl der P - U -Knoten verringert werden. Nach jeder Q - U -Iteration müssen die Blindleistungen Q_i in den P - U -Knoten mit Hilfe von Gl. (4.3-2) berechnet werden. Dabei werden in den P - U -Knoten die spezifizierten Spannungswerte und in den P - Q -Knoten die aktuellen, durch die Iteration bestimmten Spannungswerte verwendet. Solange die Ungleichungen

$$Q_i^{\min} \leq Q_i \leq Q_i^{\max} \quad (4.5-7)$$

in den P - U Knoten nicht verletzt sind, kann die Iteration fortgesetzt werden. Andernfalls muß der bisher als P - U Knoten behandelte Knoten in einen P - Q Knoten überführt werden, wobei für Q_i entweder die obere oder die untere Grenze $Q_i^{\max}$ resp. $Q_i^{\min}$ eingesetzt werden muß.

4.6 Konvergenzverhalten

Bild 4.6-1 zeigt ein typisches Konvergenzverhalten der entkoppelten Lastflußberechnung, indem die größten Abweichungen von ΔP_i und ΔQ_i gemäß Gl. (4.5-1) resp. (4.5-4) über der Anzahl Iterationen aufgetragen werden. Jede Lösung des Gleichungssystems (4.3-34) resp. (4.3-35) bringt eine deutliche Reduktion des Fehlers ΔP_i und ΔQ_i .

Die Auswirkung von Änderungen der Spannungswinkel $\Delta \delta$ auf die Blindleistungsbilanzen ΔQ_i äußert sich dadurch, daß die maximalen Abweichungen ΔQ_i in der P - δ -Iteration zunehmen. Dasselbe gilt für die ΔP_i -Änderungen während der ersten Q - U -Iterationen. Allerdings sind die Auswirkungen nicht so ausgeprägt wie im ersten Fall, weil die Wirkverluste, verursacht durch Blindleistungsflüsse, normalerweise kleiner sind als die Blindverluste, die durch Wirkleistungsflüsse verursacht werden.

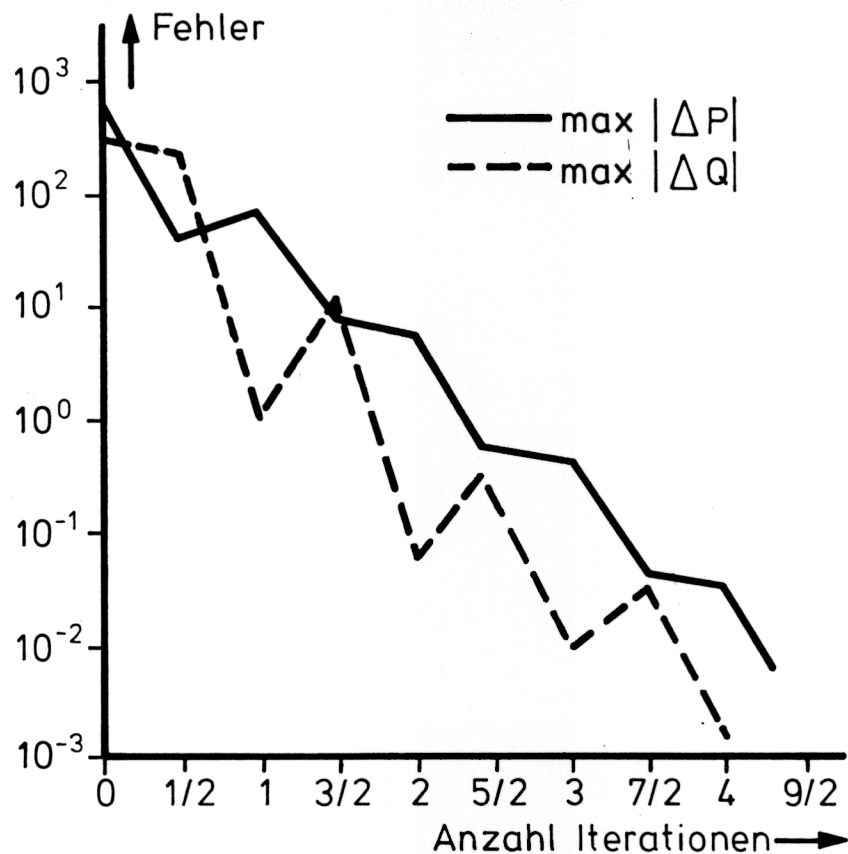


Bild 4.6-1 Typisches Konvergenzverhalten des entkoppelten Lastflußverfahrens

4.7 Gleichstrom-Lastflußberechnung

Für zahlreiche Netzberechnungen reicht eine Näherung oft für erste Überlegungen aus. Aufbauend auf den bisherigen Überlegungen erscheint die Benutzung des $P-\delta$ -Modells für eine ungefähre Netzberechnung ausreichend. Dabei setzt man alle Spannungsbeträge $U_i = 1.0$ und erhält so das lineare Gleichungssystem (4.3-34), das man oft als Gleichstrom-Lastflußmodell (DC-Lastfluß) bezeichnet. Da man die Nettowirkleistungen P_i in allen Netzknoten kennt, kann man anstelle von Gl. (4.3-34) unmittelbar schreiben

$$B' \delta = P \quad (4.7-1)$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß bisher beim $P-\delta$ -Modell eine Linearisierung in der Umgebung des aktuellen Betriebspunktes vorgenommen wird, d. h. die Gl. (4.3-34) gilt nur für Abweichungen bezüglich des Betriebspunktes. Demgegenüber ist das DC-Lastflußmodell ein lineares Gleichungssystem, in dem durch eine Matrizeninversion für die vorgegebene Wirkleistungen P_i in allen Netzknoten unmittelbar die Spannungswinkel δ_i berechnet werden können.

Aufgaben

Aufgabe 4.1

Für das in Bild Ü 4.1-1 gezeigte, zweiknotige Netz soll die Entkopplung zwischen der Wirk- und Blindleistung untersucht werden. Dazu sind folgende Kurven zu berechnen und zu diskutieren:

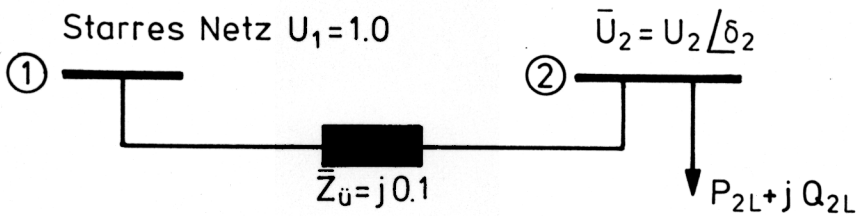


Bild Ü 4.1-1 Zweiknotiges Netz für die Bestimmung der Entkopplung zwischen Wirk- und Blindleistung

- Spannungsbetrag U_2 als Funktion der Last P_{2L} in Knoten 2 mit der Blindleistung Q_{2L} in Knoten 2 als Parameter.
- Spannungswinkel δ_2 als Funktion der Last P_{2L} in Knoten 2 mit der Blindleistung Q_{2L} in Knoten 2 als Parameter.
- Spannungsbetrag U_2 als Funktion der Last Q_{2L} in Knoten 2 mit der Wirkleistung P_{2L} in Knoten 2 als Parameter.
- Spannungswinkel δ_2 als Funktion der Last Q_{2L} in Knoten 2 mit der Wirkleistung P_{2L} in Knoten 2 als Parameter.

Aufgabe 4.2

Für das in Kapitel 3, Bild 3.4-1 ausführlich vorgestellte, dreiknotige Testnetz ist eine Gleichstrom-Lastflußberechnung durchzuführen. Für die Knoten- und Leitungsdaten wird auf Bild 3.4-1 in Kapitel 3 verwiesen. Neben der Berechnung der Spannungswinkel sind auch die Wirkleistungsflüsse auf den drei Leitungen zu bestimmen. Diese Ergebnisse sind mit den in Kapitel 3 angegebenen, exakten Werten zu vergleichen.

5 Bewertung der Lastflußberechnung und Sensitivitätsanalyse

5.1 Diskussion der Lastflußergebnisse

Auf der Basis der bisherigen Überlegungen zur Berechnung des stationären Betriebszustandes eines elektrischen Energieversorgungssystems mit Hilfe der Lastflußberechnung soll nun an Hand des folgenden Beispiels die Interpretation der Ergebnisse verdeutlicht werden. Grundsätzlich sind die beiden folgenden Fragen zu klären:

- Welche Übertragungsleitungen und Transformatoren sind überlastet?
- Welche Knotenspannungsbeträge sind außerhalb der zulässigen Grenzwerte?

Beide Aspekte müssen für eine Vielzahl verschiedener Einspeise- und Belastungssituationen überprüft werden. So ist etwa für den Starklastfall zu prüfen, ob Spannungen untere Grenzwerte nicht verletzen. Bei einer Schwachlastsituation ist zu prüfen, ob durch kapazitive Spannungsüberhöhungen keine Grenzen nach oben überschritten werden. Schon aus diesen ersten Überlegungen geht deutlich hervor, daß die Lastflußberechnung sowohl für die Betriebsführung wie auch die Ausbauplanung eines elektrischen Energieversorgungssystems ein unerläßliches Hilfsmittel darstellt.

Bild 5.1-1 zeigt das zu untersuchende Netz, wobei die Element-Daten in Tabelle 5-1 und die Knotendaten in Tabelle 5-2 zusammengestellt sind. Als Basisleistung wird $S_B = 100 \text{ MVA}$, als Basisspannung $U_B = 220 \text{ kV}$ verwendet. Wo keine Einheiten angegeben sind, handelt es sich stets um bezogene Größen.

Die Berechnung des Betriebszustandes mit Hilfe eines Lastflußprogramms führt zu den in Tabelle 5-3 und 5-4 gezeigten Ergebnissen. Dabei werden diese hier zwar in bezogener Darstellung angegeben; in der Praxis sind sie jedoch immer in physikalische Einheiten umgerechnet, um unmittelbar mit den Erfahrungswerten des Betriebes verglichen werden zu können.

Die Beurteilung dieser Ergebnisse in Tabelle 5-3 und 5-4 führt zu folgenden Feststellungen:

Tabelle 5-1 Leitungs- und Transformatordaten

Anfangs-knoten	End-knoten	R	X	B	S_N	Bemerkung
1	2	0,0012	0,015	0,0	4,0	Blocktransformator
2	6	0,023	0,138	0,271	2,0	Freileitung
2	4	0,015	0,092	0,181	2,0	Freileitung
3	4	0,001	0,012	0,0	5,0	Blocktransformator
4	7	0,023	0,138	0,271	2,0	Freileitung
5	6	0,002	0,024	0,0	2,5	Blocktransformator
6	7	0,015	0,092	0,181	2,0	Freileitung

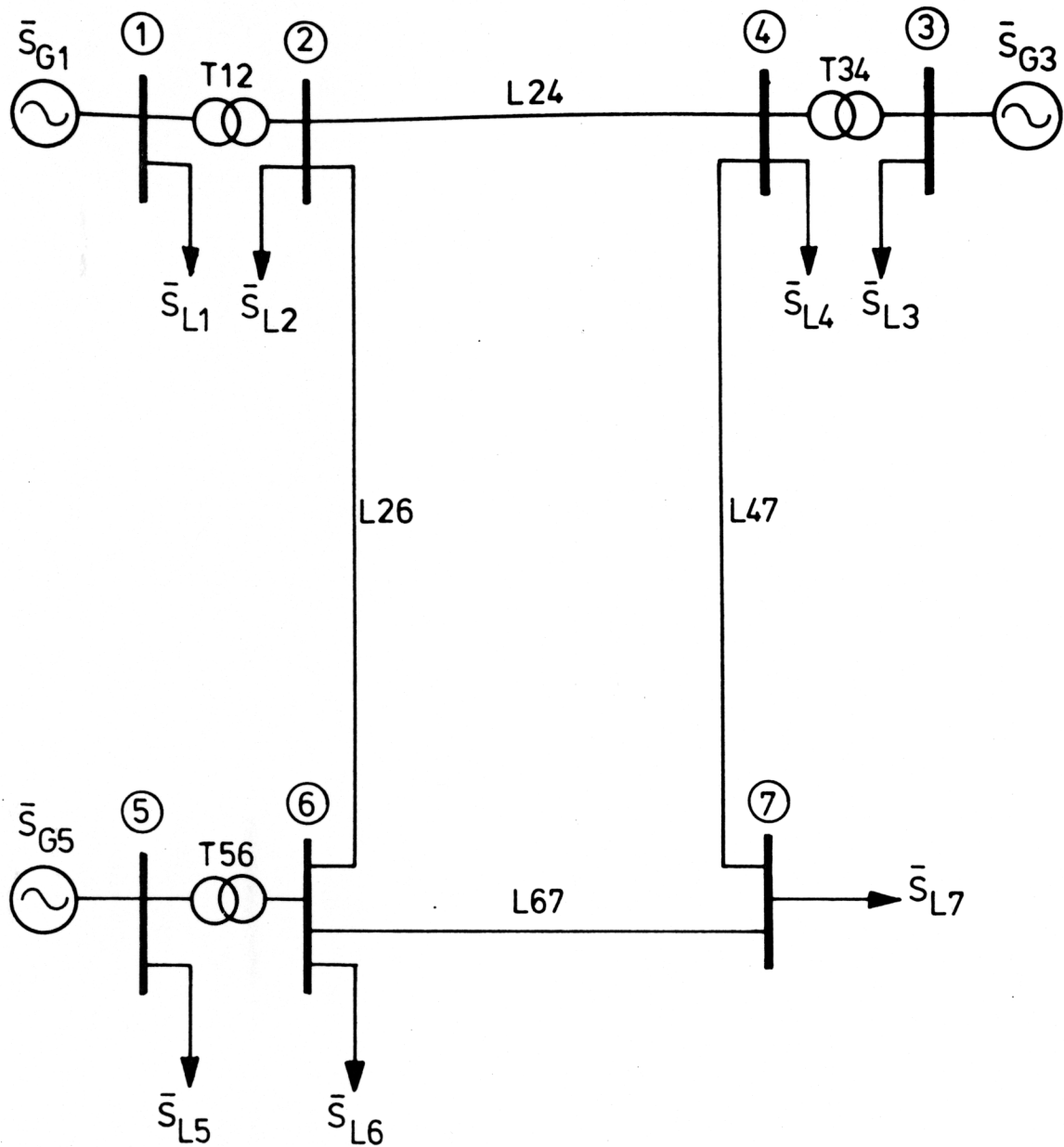


Bild 5.1-1 Siebenknotiges Testnetz zur Illustration der Lastflußberechnung

Tabelle 5-2 Knotendaten

Knoten- nummer	Knoten- typ	Spannungen		Einspeisungen		Lasten		Grenzen	
		U_i	δ_i	P_G	Q_G	P_L	Q_L	$Q_{\max}$	$Q_{\min}$
1	3	1,0	0,0	?	?	0,0	0,0	4,0	0,0
2	1	?	?	0,0	0,0	2,0	0,3	—	—
3	2	1,05	?	5,0	?	0,6	0,08	4,0	-3,0
4	1	?	?	0,0	0,0	2,0	0,2	—	—
5	2	1,05	?	2,0	?	0,5	0,05	1,4	-1,0
6	1	?	?	0,0	0,0	1,0	0,3	—	—
7	1	?	?	0,0	0,0	4,0	1,0	—	—

1. Der Spannungsbetrag U_7 in Knoten 7 liegt 13,6% unterhalb des Nennwertes. Die Ursache dafür ist die große Last in Knoten 7.
2. Die Leitung L 4–7 ist zu 33,3% überlastet. Die Ursache ist die niedrige Spannung

Tabelle 5-3 Knotendaten nach der Lastflußberechnung

Knoten- nummer	Spannungen		Einspeisungen		Lasten	
	U_i	δ_i	P_G	Q_G	P_L	Q_L
1	1,00	0,0	3,42	0,001	0,0	0,0
2	0,997	-2,9	0,0	0,0	2,0	0,3
3	1,050	-0,9	5,0	1,84	0,6	0,08
4	1,027	-3,6	0,0	0,0	2,0	0,2
5	1,007	-11,8	2,0	1,4	0,5	0,05
6	0,972	-13,8	0,0	0,0	1,0	0,3
7	0,864	-24,0	0,0	0,0	4,0	1,0

U_7 , die bei einem entsprechend großen Spannungsabfall zu einem erheblichen Blindleistungsfluß Q_{47} führt.

3. Die Leitung L 6 – 7 ist geringfügig überlastet, was wiederum mit der niedrigen Spannung U_7 zusammenhängt.

Um diesen Betriebszustand zu verbessern, gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Eine davon besteht darin, eine zusätzliche Leitung zwischen den Knoten 2 und 7 mit den Daten

$$R_{27} = 0,027 \quad X_{27} = 0,16 \quad B_{27} = 0,326 \quad S_N = 2,0$$

in Betrieb zu nehmen. Die erneute Lastflußberechnung zeigt, daß nach Einschalten dieser Leitung keine Überlastung mehr auftritt. Ferner beträgt nun die Spannung in Knoten 7: $U_7 = 0,946$.

Als weitere Möglichkeit wird nun untersucht, welche Änderungen durch das Anheben des Spannungsbetrages erreicht werden, indem kapazitive Leistung in Knoten 7 eingespeist wird (Blindleistungskompensation). Die Blindleistung Q_{L7} beträgt in der bisherigen Rechnung: $Q_{L7} = 1,0$. Eine kapazitive Einspeisung mit z. B. einer Kondensatorbatterie in Knoten 7 bewirkt eine Verringerung von Q_{L7} auf den neuen Wert $Q_{L7} = 0,2$. Dadurch wird der Spannungsbetrag U_7 angehoben. Dazu ist ein Kompensationskondensator $C = 5,4 \mu\text{F}$ erforderlich. Die Ergebnisse für diesen Betriebszustand zeigt Tabelle 5-5.

Tabelle 5-4 Leistungsflüsse über Leitungen und Transformatoren

Anfangs- knoten i	End- knoten j	P_{ij}	Q_{ij}	S_{ij}	P_{ji}	Q_{ji}	S_{ji}
<i>Leitung</i>							
2	6	1,33	-0,05	1,33	-1,29	0,04	1,29
4	7	2,45	1,07	2,67	-2,28	-0,34	2,31
2	4	0,07	-0,42	0,43	-0,07	0,25	0,26
6	7	1,78	0,92	2,01	-1,72	-0,66	1,84
<i>Transformator</i>							
1	2	3,41	0,00	3,41	-3,41	0,00	3,41
3	4	4,40	1,76	4,74	-4,38	-1,52	4,64
5	6	1,50	1,35	2,02	-1,42	-1,25	1,95

Tabelle 5-5 Knotendaten der Lastflußberechnung mit einer Blindleistungskompensation in Knoten 7

Knoten- nummer	Spannungen		Einspeisungen		Lasten	
	U_i	δ_i^0	P_G	Q_G	P_L	Q_L
1	1,000	0,0	3,28	-0,46	0,0	0,0
2	1,004	-2,8	0,	0,	2,0	0,3
3	1,050	2,5	5,00	0,83	0,6	0,08
4	1,038	-0,2	0,	0,	2,0	0,2
5	1,050	-6,5	2,0	0,82	0,5	0,05
6	1,030	-8,3	0,	0,	1,0	0,3
7	0,990	14,0	0,	0,	4,0	0,2

Dieses illustrative Beispiel zeigt, daß mit einem Lastflußprogramm eine Vielzahl von möglichen Veränderungen des Betriebszustandes systematisch untersucht werden kann. Ferner bietet das Arbeiten mit einem Lastflußprogramm den Vorteil, Erfahrungen in der Netzführung analytisch zu verifizieren und mit Hilfe von Simulationsverfahren zu erweitern.

Abschließend sei noch auf den Einsatz von Lastflußprogrammen für die Ausfallsimulation hingewiesen. Für die Sicherung einer unterbrechungsfreien Energieversorgung müssen im Rahmen der Netzsicherheitsrechnung die Auswirkungen von Kraftwerks- und Leitungs- resp. Transformatorausfällen systematisch untersucht werden. Dazu sind eine Vielzahl von Varianten mit dem Lastflußprogramm durchzurechnen. Kann ein beliebiges Element ausfallen, ohne daß dadurch die Versorgungskontinuität gestört wird, spricht man von der Einhaltung des „ $n-1$ “-Prinzips. Bezogen auf das obige Beispiel stellt man fest, daß der Ausfall der Leitung von Knoten 2 nach Knoten 7 zu unzulässigen Grenzwertüberschreitungen führt; d. h. das $n-1$ -Prinzip wäre demzufolge nicht erfüllt.

5.2 Sensitivitätsanalyse der Lastflußgleichungen

In diesem Abschnitt wird folgende Problemstellung untersucht. Unter der Voraussetzung, daß ein bestimmter stationärer Betriebszustand eines elektrischen Netzes vorliegt, der mit Hilfe eines Lastfluß Programms berechnet werden kann, soll nun die Auswirkung kleiner Änderungen in den Kraftwerkeinspeisungen oder den Knotenlasten auf das Spannungsprofil untersucht werden. Dabei sollen die Auswirkungen nicht durch eine erneute Lösung der Lastflußgleichungen, sondern durch eine linearisierte Extrapolation um den bereits bekannten Betriebspunkt herum berechnet werden.

Es wird von der allgemeinen Formulierung der Lastflußgleichungen als System von n nichtlinearen, komplexen Netzgleichungen der Form

$$f(x, u, p) = 0 \quad (5.2-1)$$

ausgegangen. Dabei ist der Zustandsvektor x durch die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ mit $i = 1, 2, \dots, n$, der Steuervektor u durch die komplexen Kraftwerkeinspeisungen $\bar{S}_{Gi}$ und der Störvektor p durch die komplexen Knotenlasten $\bar{S}_{Li}$ gegeben. n bezeichnet die Anzahl der Netzknoten.

Es kann nun festgestellt werden, daß Änderungen in p und u zu einem neuen Zustandsvektor x und damit zu einem neuen Betriebspunkt führen, der durch die Beziehung

$$f(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u, p^0 + \Delta p) = 0 \quad (5.2-2)$$

beschrieben wird. Natürlich beschreibt die Gl. (5.2-2) nur den stationären Zustand nach den durch Δp , Δu und Δx hervorgerufenen Änderungen. Der transiente Übergang von einem Betriebszustand in den anderen wird dabei nicht modelliert.

In Komponentenform folgt für die i -te Gleichung der Vektorbeziehung (5.2-2)

$$f_i(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, u_1^0 + \Delta u_1, u_2^0 + \Delta u_2, \dots, p_1^0 + \Delta p_1, p_2^0 + \Delta p_2, \dots) = 0 \quad (5.2-3)$$

Entwickelt man die nichtlinearen Funktionen f_i in TAYLOR-Reihen um den stationären Ausgangszustand (x^0, u^0, p^0) und berücksichtigt man nur Terme erster Ordnung, so gilt anstelle von Gl. (5.2-2)

$$\begin{aligned} f_i(x^0, u^0, p^0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial f_i}{\partial p_2} \Delta p_2 + \dots \approx 0 \end{aligned} \quad (5.2-4)$$

Dabei ist der erste Term wegen Gl. (5.2-1) definitionsgemäß gleich Null. Die partiellen Ableitungen sind für die Werte x^0, u^0 und p^0 zu berechnen. Im Referenzknoten mit der Nummer 1 gilt $\delta_1 = 0 = \text{konst.}$ (Referenzachse) und somit ist $\Delta x_1 = 0$. Insgesamt können somit alle n Reihenentwicklungen (5.2-4) in Matrizenform geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & J_x \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial u_{2n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f_2}{\partial u_{2n}} \\ \vdots J_u \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f_{2n}}{\partial u_{2n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_{2n} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial p_{2n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \dots \frac{\partial f_2}{\partial p_{2n}} \\ \vdots J_p \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial p_1} \dots \frac{\partial f_{2n}}{\partial p_{2n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2-5)$$

In abgekürzter Form gilt somit für das linearisierte Gleichungssystem (5.2-5)

$$J_x \Delta x + J_u \Delta u + J_p \Delta p = 0 . \quad (5.2-6)$$

Wegen der bereits genannten Eigenschaften des Referenzknotens mit $\Delta x_1 = 0$ kann die erste Zeile und die erste Spalte in Gl. (5.2-5) gestrichen werden; d. h. das reduzierte Gleichungssystem hat die Dimension $(2n-1)$. Für die Dimension der JACOBischen Matrizen in Gl. (5.2-6) gilt

$$\dim J_x = (2n-1) \times (2n-1) \quad \dim J_u = \dim J_p = (2n-1) \times 2n . \quad (5.2-7)$$

Für die Berechnung der JACOBischen Matrix J_p ist die Abhängigkeit der Lasten von der Spannung als bekannt vorauszusetzen. Deshalb müssen für die Sensitivitätsanalyse entsprechende, stationäre Lastmodelle bekannt sein, denn nur so können die Änderungen des Betriebszustandes richtig bestimmt werden.

Verwendet man für die Definition des Zustandsvektors x die in Gl. (3.3-2) benutzte Anordnung für Real- und Imaginärteil der komplexen Knotenspannungen, so ist die JACOBische Matrix J_x in Gl. (5.2-6) mit derjenigen in Gl. (3.3-2), wie sie für die Erklärung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens benutzt wurde, identisch.

Löst man nun Gl. (5.2-6) nach Δx auf, so erhält man die Auswirkung von Änderungen in den Einspeisungen Δu resp. in den Lasten Δp auf das Spannungsprofil

$$\begin{aligned} \Delta x &= -J_x^{-1} J_u \Delta u - J_x^{-1} J_p \Delta p \\ &= S_u \Delta u + S_p \Delta p . \end{aligned} \quad (5.2-8)$$

Dabei bezeichnen S_u und S_p die Empfindlichkeitsmatrizen von Änderungen in u resp. in p auf den Zustandsvektor x . Sie sind durch die in Gl. (5.2-6) definierten JACOBischen Matrizen J_x , J_u und J_p definiert.

5.3 Lastfluß-Steuerung mit Regeltransformatoren

In diesem Abschnitt wird die Fragestellung untersucht, wie mit Hilfe eines linearisierten Modells die Auswirkungen von Regeleingriffen an Stelltransformatoren auf die Verteilung der Wirk- und Blindleistungsflüsse bestimmt werden können. Auf diese Weise wird es möglich, eine bestehende Lastflußverteilung mit Hilfe von Quer- und Längsregler so zu beeinflussen, daß bestimmt Betriebszustände erreicht werden; z. B. kann so die Frage untersucht werden, durch welche Steuereingriffe am Regeltransformator die Überlastung einer Übertragungsleitung abgebaut werden kann.

5.3.1 Querregelung und Wirkfluß-Steuerung

Die Lastfluß-Steuerung kann mit dem in Kapitel 2 beschriebenen Längs- und Querregelungs-Transformator durchgeführt werden. Der Wirkleistungsfluß P_{ij} durch einen Transformator zwischen den Knoten i (Primärseite) und j (Sekundärseite) wird durch die Kurzschluß-Reaktanz X_{ij} des Transformators und das Übersetzungsverhältnis $\bar{u}$ bestimmt. Ausgehend vom Transformatormodell (Kapitel 2) und den in Kapitel 3 berechneten Wirkleistungsflüssen gilt

$$P_{ij} = U_i U_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{ij}) . \quad (5.3-1)$$

Dabei ist die Transformator-Suszeptanz B_{ij} durch den inversen Wert der Kurzschlußreaktanz $X_{ij} = \text{Im}(\bar{Z}_k)$ gegeben

$$B_{ij} = 1/X_{ij} . \quad (5.3-2)$$

Der Winkel α_{ij} bezeichnet die Phasendrehung des Querreglers, die zusätzlich zu der von der Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ bewirkten Phasendrehung als Regelgröße zu berücksichtigen ist.

Um eine lineare Sensitivitätsanalyse durchführen zu können, werden in Gl. (5.3-1) folgende Vereinfachungen benutzt.

- a) Die Spannungsbeträge U_i und U_j werden durch die Nennspannungen approximiert; d. h. in der bezogenen Darstellung gilt

$$U_i = U_j = 1,0 . \quad (5.3-3)$$

- b) Die sin-Funktion wird durch das Argument approximiert, da die Winkeldifferenz eine kleine Größe ist

$$\sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{ij}) \approx (\delta_i - \delta_j) - \alpha_{ij} . \quad (5.3-4)$$

Verwendet man diese beiden Vereinfachungen in Gl. (5.3-1), so kann man folgende, linearisierte Beziehung für den Wirkleistungsfluß durch den Querregler mit der Phasendrehung α_{ij} angeben

$$P_{ij} \approx B_{ij} (\delta_i - \delta_j) - \alpha_{ij} B_{ij} . \quad (5.3-5)$$

Löst man Gl. (5.3-5) nach der durch den Querregler hervorgerufenen Phasendrehung α_{ij} auf, so gilt

$$\alpha_{ij} = (\delta_i - \delta_j) - P_{ij}/B_{ij} . \quad (5.3-6)$$

Diese Beziehung läßt sich mit dem in Bild 5.3-1 gezeigten, linearen Gleichstrom-Ersatzschaltbild darstellen.

Der Querregler besteht somit in der linearisierten Darstellung aus einer Spannungsquelle, deren Betrag durch P_{ij}/B_{ij} gegeben ist, sowie einem Quellen-Innenwiderstand,

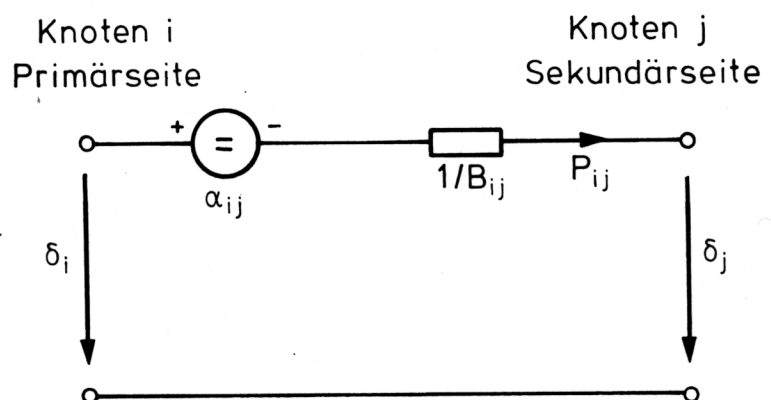


Bild 5.3-1 Gleichstrom-Ersatzdarstellung des Querreglers

der durch die Kurzschlußreaktanz $X_{ij} = 1/B_{ij}$ gegeben ist. Ist der Querregler in der Mittelstellung mit $\alpha_{ij} = 0$, so gilt Bild 5.3-1 ohne die Spannungsquelle.

Für den Netzbetrieb ist die Überwachung der Übertragungsleitungen von großem Interesse. Mit Hilfe des in Bild 5.3-2 gezeigten, fünfknotigen Netzes soll die Wirkleistungs-Steuerung mit dem Querregler untersucht werden, wobei von dem linearisierten Modell (5.3-6) Gebrauch gemacht wird. Zwischen den Knoten 3 und 5 ist ein querregelnder Transformator eingebaut. Er wird zur Steuerung des Wirkleistungsflusses auf der Leitung von Knoten 4 nach 5 eingesetzt. Im folgenden wird gezeigt, wie die Veränderung der zusätzlichen Phasendrehung α_{35} den Wirkleistungsflußes P_{45} beeinflusst.

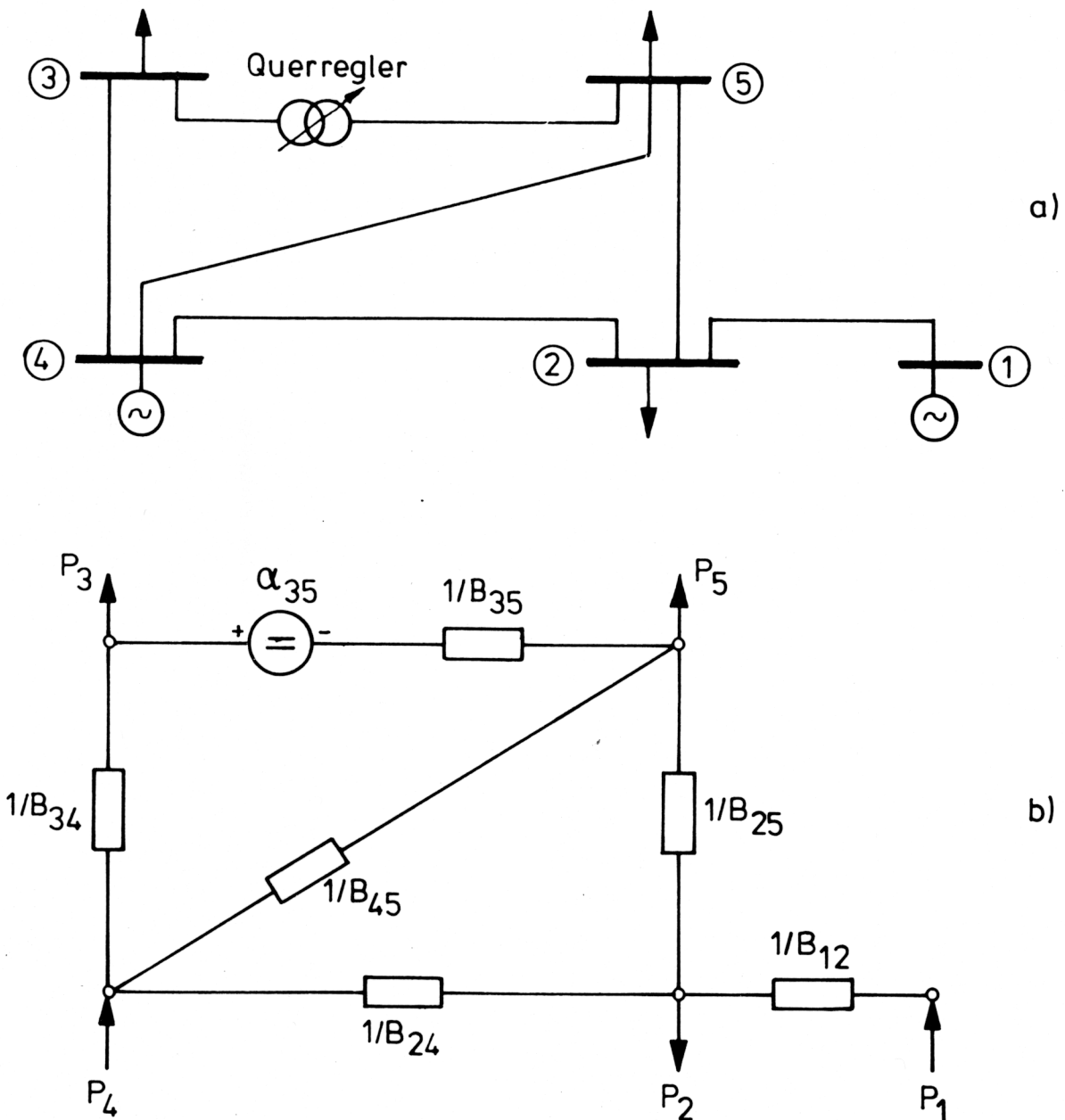


Bild 5.3-2 Fünfknotiges Netz zur Untersuchung der Wirkleistungs-Steuerung mit dem Querregler
a) Anlagenbild mit Querregler zwischen Knoten 3 und 5
b) Ersatzschaltung unter Verwendung von Bild 5.3-1

Bild 5.3-2 zeigt neben dem Anlagenbild die im weiteren Verlauf der Berechnung benutzte Ersatzschaltung. Für den Querregler und die speziell interessierende Übertragungsleitung von Knoten 4 nach 5 gilt

$$\alpha_{35} = (\delta_3 - \delta_5) - P_{35}/B_{35} \quad (5.3-7)$$

$$0 = (\delta_4 - \delta_5) - P_{45}/B_{45}$$

Für die Beschreibung des übrigen Netzes werden die in Kapitel 4.7 vorgestellten Gleichstrom-Lastflußgleichungen verwendet. Sie lauten für das vorliegende Netz mit Knoten 1 als Referenzknoten, d. h. $\delta_1 = 0$ und die Beziehung für P_1 wird weggelassen, um keine linearen Abhängigkeiten einzuführen

$$P_2 = \delta_2 B_{12} + (\delta_2 - \delta_4) B_{24} + (\delta_2 - \delta_5) B_{25}$$

$$P_3 = (\delta_3 - \delta_4) B_{34} + P_{35} \quad (5.3-8)$$

$$P_4 = (\delta_4 - \delta_2) B_{24} + (\delta_4 - \delta_3) B_{34} + P_{45}$$

$$P_5 = (\delta_5 - \delta_2) B_{25} - P_{35} - P_{45} .$$

Die beiden Gleichungssysteme (5.3-7) und (5.3-8) sind miteinander gekoppelt und können in Matrixschreibweise zusammengefaßt werden. Dabei nimmt man die Phasendrehung α_{35} sowie die Einspeisungen resp. Lasten in den Knoten 2, 3, 4 und 5 als bekannt an.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{35} \\ 0 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/B_{35} & . & . & 1 & . & -1 \\ . & -1/B_{45} & . & . & 1 & -1 \\ \hline . & . & B_{12} + B_{24} + B_{25} & . & -B_{24} & -B_{25} \\ 1 & . & . & B_{34} & -B_{34} & . \\ . & 1 & -B_{24} & -B_{34} & B_{24} + B_{34} & . \\ -1 & -1 & -B_{25} & . & . & B_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{35} \\ P_{45} \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix} \quad (5.3-9a)$$

Allgemein läßt sich Gl. (5.3-9) folgendermaßen schreiben

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\delta & C_\delta \\ C_\delta^T & B_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\ddot{u}} \\ \delta \end{bmatrix} \quad (5.3-9b)$$

Dabei ist C_δ eine Untermatrix der Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix. B_δ ist ein Teil der Knotenadmittanzmatrix, wobei der Zweig des Querreglers und die zu überwachende Leitung nicht in B_δ enthalten sind. Die Impedanzmatrix Z_δ beschreibt den Netzteil bestehend aus Querregler und Freileitung zwischen den Knoten 4 und 5.

Da Gl. (5.3-9) linear ist, kann sie unmittelbar als Inkremental-Beziehung angegeben werden

$$\begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\delta & C_\delta \\ C_\delta^T & B_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{\ddot{u}} \\ \Delta \delta \end{bmatrix} \quad (5.3-10)$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt die gesuchten Abhängigkeiten zwischen dem Querregler und dem Wirkleistungsfluß auf der zu überwachenden Leitung.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{\dot{u}} \\ \Delta \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\delta} & T_{\delta} \\ T_{\delta}^T & X_{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta P \end{bmatrix}. \quad (5.3-11)$$

Dieses Ergebnis der linearen Sensitivitätsanalyse läßt sich wie folgt interpretieren. Die Teilmatrizen in Gl. (5.3-11) haben folgende Bedeutung

- Y_{δ} : Das Element (i, j) gibt an, wie sich der i -te Wirkleistungsfluß (z. B. P_{45}) aufgrund des j -ten Querreglers (z. B. α_{35}) verändert. Die Dimension der quadratischen symmetrischen Matrix Y_{δ} ist durch die Anzahl der Querregler und überwachten Leitungen gegeben. Im vorliegenden Fall ist es eine (2×2) Matrix.
- X_{δ} : Das Element (i, j) dieser Sensitivitätsmatrix gibt an, wie sich der Spannungswinkel δ_i ändert, wenn die Einspeisung P_j um ΔP_j geändert wird. Die Dimension der quadratischen, symmetrischen Matrix X_{δ} ist durch die Anzahl der Netzknoten $n - 1$ gegeben, da der Referenzknoten wie erwähnt weggelassen werden muß.
- T_{δ} : Das Element (i, j) dieser Sensitivitätsmatrix beschreibt die Abhängigkeit des i -ten Wirkleistungsflusses (z. B. P_{45}) bezüglich der j -ten Wirkleistungseinspeisungs-Änderung ΔP_j (z. B. ΔP_3). Die Rechtecksmatrix T_{δ} hat l Zeilen und $n - 1$ Spalten; dabei ist l durch die Anzahl der zu überwachenden und regelnden Übertragungselemente (z. B. $l = 2$) und $n - 1$ durch die Anzahl Netzknoten gegeben (z. B. $n - 1 = 4$).

5.3.2 Längsregelung und Blindfluß-Steuerung

Der Blindleistungsfluß Q_{ij} durch einen Transformator zwischen den Knoten i (Primärseite) und j (Sekundärseite) wird durch die Kurzschluß-Impedanz $\bar{Z}_k$ des Transformators bestimmt. Ausgehend vom Transformator-Modell, wie es in Kapitel 2 vorgestellt worden ist, gilt mit den in Kapitel 3 berechneten Blindleistungsfluß-Beziehungen

$$Q_{ij} = \frac{U_i^2}{\ddot{u}^2} B_{ij} - \frac{U_i U_j}{\ddot{u}} B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j). \quad (5.3-12)$$

Dabei ist die Transformator-Suszeptanz B_{ij} durch die inverse Kurzschlußreaktanz X_{ij} gegeben. Unter Verwendung der in Abschnitt 5.3.1 benutzten Eigenschaften der kleinen Winkeldifferenz $(\delta_i - \delta_j)$ gilt mit guter Näherung für den Blindstrom auf der Primärseite

$$J_{ij} = \frac{Q_{ij}}{U_i} \approx \frac{1}{\ddot{u}} \left(\frac{U_i}{\ddot{u}} - U_j \right) B_{ij}. \quad (5.3-13)$$

Für den Blindstrombetrag J_{ji} auf der Sekundärseite des Transformators gilt

$$J_{ji} = \frac{Q_{ji}}{U_j} \approx \left(U_j - \frac{U_i}{\ddot{u}} \right) B_{ji}. \quad (5.3-14)$$

Das Nenn-Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}_N$ eines Transformators ist durch

$$\ddot{u}_N = U_i / U_j = 1 \quad (5.3-15)$$

in der bezogenen Darstellung gegeben.

Um nun die Auswirkungen eines Längsreglers auf die Blindfluß-Verteilung in einem Energieübertragungssystem untersuchen zu können, ist festzuhalten, daß nun zusätzlich zum Spannungsabfall des Blindstromes J_{ij} über der Kurzschlußreaktanz X_{ij} ein Spannungsabfall e_{ik} als Regelgröße eingestellt werden kann. Um die Auswirkungen dieser Regelgröße analytisch mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse beschreiben zu können, wird zwischen der Primär- und Sekundärseite des Längsreglers, die mit i und j bezeichnet werden, ein zusätzlicher, fiktiver Knoten k eingeführt. Die Regelgröße e_{ik} tritt zwischen den Knoten i und k auf. Zwischen den Spannungen U_i auf der Primärseite des Transformators und der Spannung U_k am fiktiven Knoten k gilt nun

$$e_{ik} = U_i - U_k . \quad (5.3-16)$$

Für den Spannungsabfall zwischen dem fiktiven Knoten k und der Sekundärseite j des Längsreglers gilt mit der Kurzschluß-Reaktanz X_{ij} und dem durch den Transformator fließenden Blindstrom J_{ij}

$$U_k - U_j = X_{ij} J_{ij} . \quad (5.3-17)$$

Dabei ist anzumerken, daß die in Gl. (5.3-16) und (5.3-17) angegebenen Operationen algebraisch und nicht vektoriell durchgeführt werden können, da die Regelgröße e_{ik} die gleiche Phasenlage wie der Spannungsabfall $X_{ij} J_{ij}$ hat. Dies rührt daher, daß entsprechend Gl. (5.3-13) nur der zum Blindleistungsfluß Q_{ij} proportionale Blindstrom J_{ij} in Gl. (5.3-17) berücksichtigt wird.

Eliminiert man nun in Gl. (5.3-16) und (5.3-17) die fiktive Hilfsspannung U_k , so erhält man für die Regelgröße e_{ik}

$$e_{ik} = U_i - U_j - X_{ij} J_{ij} . \quad (5.3-18)$$

Aufgelöst nach dem Blindstrom J_{ij} erhält man schließlich

$$J_{ij} = (U_i - U_j - e_{ik}) B_{ij} , \quad (5.3-19)$$

wobei die Kurzschlußreaktanz X_{ij} durch den entsprechenden Suszeptanzwert $B_{ij} = 1/X_{ij}$ ersetzt worden ist.

Für den sekundärseitigen Blindstrom J_{ij} erhält man bei Vernachlässigung der Eisenverluste unmittelbar

$$J_{ij} = -J_{ji} . \quad (5.3-20)$$

Da die Regelgröße e_{ik} im Längsregler zwischen den Knoten i und j auftritt, der fiktive Knoten k jedoch eliminiert worden ist, wird für die weiteren Überlegungen die Beziehung $e_{ik} = e_{ij}$ verwendet. Löst man nun Gl. (5.3-19) nach e_{ij} auf, so erhält man aus dieser Beziehung analog zu Bild 5.3-1 ebenfalls ein lineares Netzwerk als Ersatzschaltung für den Längsregler überführt werden. Bild 5.3-3 zeigt die entsprechende Ersatzschaltung, derzufolge der Längsregler durch eine Spannungsquelle e_{ij} mit dem Innenwiderstand $1/B_{ij}$ nachgebildet wird.

Anhand des in Bild 5.3-4 gezeigten, fünfknotigen Netzes soll die Blindfluß-Steuerung mit dem Längsregler illustriert werden, wobei von dem linearisierten Modell nach Gl. (5.3-18) Gebrauch gemacht wird. Zwischen den Knoten 4 und 5 ist ein längsregelnder Transformator eingebaut. Er wird zur Blindfluß-Steuerung auf der Leitung

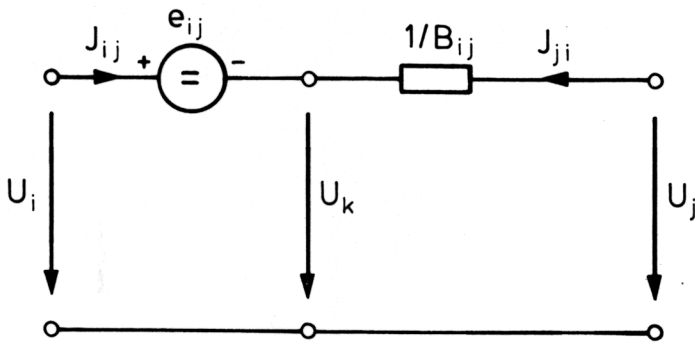


Bild 5.3-3 „Gleichstrom“-Ersatzschaltbild des Längsreglers für lineare Sensitivitätsanalyse

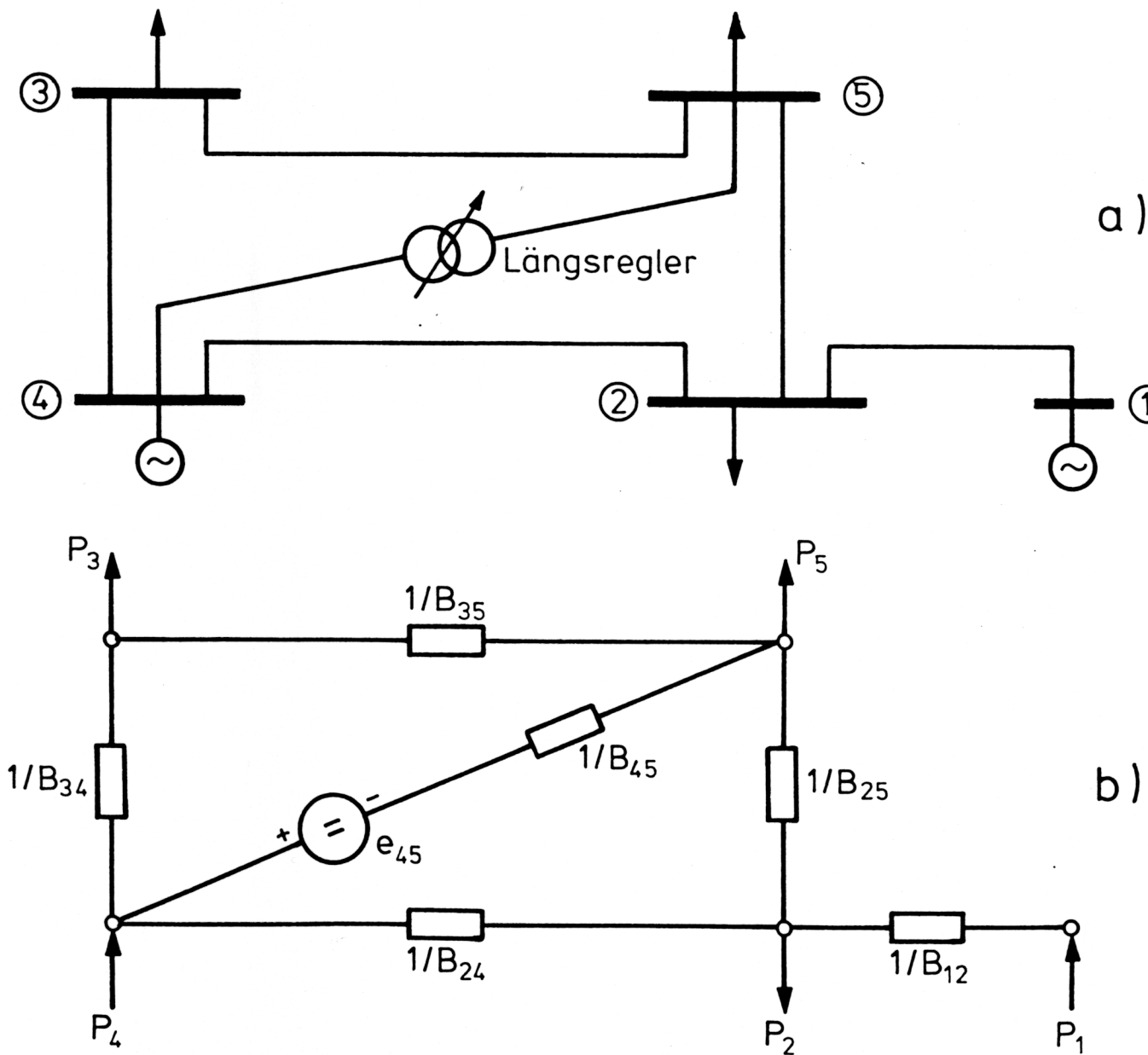


Bild 5.3-4 Fünfknotiges Netz zur Untersuchung der Blindleistungs-Steuerung mit dem Längsregler
a) Anlagenbild mit Längsregler zwischen Knoten 4 und 5
b) Ersatzschaltung unter Verwendung von Bild 5.3-3

von Knoten 3 nach 5 eingesetzt. Im folgenden wird gezeigt, wie die Veränderung der Spannungsbetragsänderung e_{45} den Blindleistungsfluß Q_{35} beeinflusst.

Wendet man das Modell nach Gl. (5.3-18) auf das in Bild 5.3-4a gezeigte Netz an, so erhält man das in Bild 5.3-4b gezeigte Ersatzschaltbild für den Blindleistungs-Spannungs-Zusammenhang. Für die beiden interessierenden Übertragungselemente zwischen den Knoten 3 und 5 resp. 4 und 5 gilt mit Gl. (5.3-18) folgendes Gleichungssystem

$$0 = U_3 - U_5 - J_{35}/B_{35} \quad (5.3-21)$$

$$e_{45} = U_4 - U_5 - J_{45}/B_{45} \quad (5.3-22)$$

Für die Beschreibung des übrigen Netzes wird der linearisierte Zusammenhang zwischen dem Blindstrom $J_i = Q_i/U_i$ und den Knotenspannungen U_i verwendet, d. h., die Approximation $\cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned} J_1 &= Q_1/U_1 = (U_1 - U_2)B_{12} \\ J_2 &= Q_2/U_2 = (U_2 - U_1)B_{12} + (U_2 - U_4)B_{24} + (U_2 - U_5)B_{25} \\ J_3 &= Q_3/U_3 = (U_3 - U_4)B_{34} + J_{35} \\ J_4 &= Q_4/U_4 = (U_4 - U_2)B_{24} + (U_4 - U_3)B_{34} + J_{45} \\ J_5 &= Q_5/U_5 = (U_5 - U_2)B_{25} - J_{35} - J_{45} \end{aligned} \quad (5.3-23)$$

Die beiden linearen Gleichungssysteme (5.3-21) bis (5.3-23) lassen sich wie folgt in der Matrizenschreibweise darstellen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e_{45} \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/B_{35} & . & . & . & 1 & . & -1 \\ . & -1/B_{45} & . & . & . & 1 & -1 \\ \hline . & . & B_{12} & -B_{12} & . & . & . \\ . & . & -B_{12} & B_{12} + B_{24} + B_{25} & . & -B_{24} & -B_{25} \\ 1 & . & . & . & B_{34} & -B_{34} & . \\ . & 1 & . & -B_{24} & -B_{34} & B_{24} + B_{34} & . \\ -1 & -1 & . & -B_{25} & . & . & B_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{35} \\ J_{45} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (5.3-24)$$

In allgemeiner Schreibweise gilt anstelle von Gl. (5.3-24)

$$\begin{bmatrix} e \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_U & C_U \\ C_U^T & B_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\bar{u}} \\ U \end{bmatrix} \quad (5.3-25)$$

Dabei besteht der Vektor $J_{\bar{u}}$ aus den beiden interessierenden Blindströmen auf den Leitungen von Knoten 3 nach 5 resp. 4 nach 5

$$J_{\bar{u}} = \begin{bmatrix} J_{35} \\ J_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{35}/U_3 \\ Q_{45}/U_4 \end{bmatrix} \quad (5.3-26)$$

Die Matrix C_U ist analog zu Gl. (5.3-9) eine Teilmatrix der Knoten-Element-Inzidenzmatrix. Allerdings muß nun hier darauf hingewiesen werden, daß mit Gl. (5.3-25) keine analoge Form zur Gleichstrom-Lastflußberechnung des $P-\delta$ -Modells erhalten worden ist. Bei vorgegebenen Blindeinspeisungen oder -belastungen Q_i können die entsprechenden Blindströme J_i nicht berechnet werden, da die Spannungsbeträge nicht bekannt sind.

Für die weiteren Sensitivitäts-Überlegungen ist zu beachten, daß die Spannungsbeträge in $P-U$ -Knoten und im Referenzknoten nicht variiert werden können, sondern fest vorgegeben sind. Demzufolge muß beim Übergang von Gl. (5.3-25) auf die hier interessierende Inkrementalform beachtet werden, daß in der Sensitivitäts-Beziehung (5.3-26) resp. (5.3-27) alle Zeilen und Spalten, die zu $P-U$ -Knoten resp. zum Referenzknoten gehören, weggelassen werden müssen. Demzufolge lautet die Sensitivitätsbeziehung für das Blindleistungs-Spannungs-Modell in der Inkrementalform

$$\begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_U & C'_U \\ C'^T_U & B'_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta J_{\bar{u}} \\ \Delta U \end{bmatrix}. \quad (5.3-27)$$

Die in dieser Beziehung auftretenden Vektoren und Matrizen haben folgende Form

$$\begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{45} \\ \Delta J_2 \\ \Delta J_3 \\ \Delta J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{45} \\ \Delta Q_2/U_2 \\ \Delta Q_3/U_3 \\ \Delta Q_5/U_5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \Delta J_{\bar{u}} \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q_{35}/U_3 \\ \Delta Q_{45}/U_4 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_5 \end{bmatrix}, \quad (5.3-28)$$

$$\begin{bmatrix} Z'_U & C'_U \\ C'^T_U & B'_U \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1/B_{35} & . & . & 1 & -1 \\ . & -1/B_{45} & . & . & -1 \\ \hline . & . & B_{12} + B_{24} + B_{25} & . & -B_{25} \\ 1 & . & . & B_{34} & . \\ -1 & -1 & -B_{25} & . & B_{25} \end{array} \right]. \quad (5.3-29)$$

Die Auflösung nach den unbekannten Größen $\Delta J_{\bar{u}}$ und ΔU erfordert eine Matrizen-inversion. Die Lösung lautet für die gesuchten Sensitivitätsbeziehungen

$$\begin{bmatrix} \Delta J_{\bar{u}} \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_U & T'_U \\ T'^T_U & X'_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta J \end{bmatrix}. \quad (5.3-30)$$

Nun lassen sich die Teilmatrizen in Gl. (5.3-30) wie folgt interpretieren

Y'_U : Das Element (i, j) gibt an, wie sich der i -te Blindstrom (z. B. J_{35}) aufgrund des j -ten Längsreglers (z. B. e_{45}) verändert. Die Dimension der symmetrischen Matrix Y'_U ist durch die Anzahl der überwachten und regelnden Längstransformatoren gegeben. Im vorliegenden Fall ist es eine (2×2) Matrix.

X'_U : Das Element (i, j) gibt an, wie sich der Spannungsbetrag U_i aufgrund der Änderung des Blindstromes ΔJ_j im Knoten j ändert. Die Dimension von X'_U ist durch die Anzahl der $P-Q$ -Knoten im Netz gegeben.

T_U : Das Element (i, j) beschreibt die Abhängigkeit des i -ten Blindstromes bezüglich der j -ten Blindstromänderung ΔJ_j in Knoten j . Die Rechtecksmatrix T_U hat so viele Zeilen, wie es überwachte Leitungen und Längsregler gibt; die Zahl der Spalten von T_U ist durch die Zahl der $P-U$ -Knoten gegeben.

5.3.3 Abschließende Bemerkungen

Die Ausführungen in diesem Abschnitt 5.3 haben gezeigt, wie man aufgrund linearisierter Netzgleichungen die Auswirkungen von Eingriffen am Querregler resp. am Längsregler auf die Wirk- resp. Blindflußverteilung untersuchen kann, ohne die gesamte Lastflußberechnung durchführen zu müssen. Dabei fällt ein hohes Maß an Analogien zwischen dem Wirk- und dem Blindleistungsproblem auf. Dazu muß jedoch im linearisierten Blindleistungsmodell anstelle von Leistungsflüssen und Knotenleistungen mit entsprechenden Blindstromwerten gearbeitet werden. Da der Stellbereich der Regeltransformatoren begrenzt ist, haben die hier abgeleiteten Beziehungen einen recht weiten Einsatzbereich. Sie ermöglichen, die Auswirkungen von Steuereingriffen auf die Lastflußverteilung in Netzen sehr schnell und recht genau zu bestimmen. Wichtige Anwendungen sind die Netzsicherheitsrechnung und die Lastflußoptimierung.

Aufgaben

Aufgabe 5.1

Im Rahmen dieser Übungsaufgabe werden die in Abschnitt 5.3.1 für das in Bild 5.3-2 gezeigte fünfknotige Netz abgeleiteten Sensitivitätsbeziehungen numerisch ausgewertet. Für die Beschreibung des stationären Ausgangszustandes enthält Tabelle 5-6 die Knotendaten und die Tabelle 5-7 die Leitungsdaten in bezogener Darstellung.

Tabelle 5-6 Knotendaten

Knoten- nummer	Knoten- typ	Einspeisung		Belastung		Spannungswerte	
		P_G	Q_G	P_L	Q_L	U	δ
1	3	?	?	0,	0,	1,0	0,0
2	1	0,0	0,0	1,0	0,5	?	?
3	1	0,0	0,0	1,0	0,5	?	?
4	2	2,0	?	0,0	0,0	1,0	?
5	1	0,0	0,0	1,5	0,5	?	?

Tabelle 5-7 Leitungsdaten

Anfangs- knoten	End- knoten	X_L	Bemerkungen
1	2	0,1	Freileitung
2	4	0,1	Freileitung
2	5	0,1	Freileitung
3	4	0,1	Freileitung
3	5	0,3	Querregler mit $\alpha = 0$
4	5	0,1	Freileitung

le 5-10, diejenigen der Leitungen in Tabelle 5-11 zusammengestellt. Die Bezugsspannung beträgt $U_B = 220 \text{ kV}$, die Bezugsleistung $S_B = 100 \text{ MVA}$.

Tabelle 5-10 Knotendaten

Knoten- nummer	Spannungen		Einspeisungen		Lasten	
	U	δ	P_G	Q_G	P_L	Q_L
1	220,0	0,	150,0	61,6	0,0	0,0
2	209,1	$-0,1^\circ$	0,0	0,0	100,0	50,0
3	204,6	$-13,9^\circ$	0,0	0,0	100,0	50,0
4	220,0	$-6,7^\circ$	200,0	157,1	0,0	0,0
5	202,8	$-15,0^\circ$	0,0	0,0	150,0	50,0

Tabelle 5-11 Leitungsdaten

Anfangs- knoten	End- knoten	P_{ij}	Q_{ij}	P_{ji}	Q_{ji}
1	2	150,0	61,6	-150,0	-35,3
2	4	-39,6	-46,4	39,6	50,5
2	5	89,6	31,7	-89,6	-21,7
3	4	-116,2	-57,8	116,2	77,3
3	5	16,2	7,8	-16,2	-7,4
4	5	44,2	29,3	-44,2	-20,9

Ausgehend von diesem stationären Betriebszustand sind folgende Fragen zu klären:

- Wie wirkt sich die Längsregelung allein auf den Blindleistungsfluß Q_{35} aus?
- Welchen Einfluß haben Blindleistungsänderungen ΔQ_i in Knoten $i = 2, 3$ und 5 auf den Blindleistungsfluß Q_{35} ?
- Welchen Einfluß hat die Längsregelung auf die Spannungsbeträge U_i in den Knoten $i = 2, 3$ und 5?
- Welchen Einfluß haben Blindleistungsänderungen ΔQ_i von 5% in den Knoten 2, 3 und 5 auf die Spannungsbeträge U_i ?

6 Wirtschaftliche Lastverteilung

6.1 Einleitung

In den bisherigen Überlegungen zur stationären Netzberechnung wurden noch keine besonderen Gesichtspunkte bei der Spezifikation der Wirkleistungseinspeisung P_{Gi} der Generatorknoten berücksichtigt. Nimmt man jedoch an, daß die gesamte Netzlast bekannt ist (durch Messung oder State Estimation für die Behandlung von Betriebsfragen; durch Prognose für die Behandlung von Planungsaufgaben), so erhebt sich die Frage, wie man diese auf die verschiedenen, zur Verfügung stehenden Kraftwerke aufteilt. Im vorliegenden Zusammenhang wird nicht auf das Problem der Einsatzplanung von Kraftwerken eingegangen, sondern nur die vereinfachte Aufgabenstellung der wirtschaftlichen Lastverteilung behandelt. Dabei handelt es sich um eine Momentanoptimierung, indem die gesamte Netzlast nach den wirtschaftlichen Gesichtspunkten

- a) Kosten der Energieerzeugung
- b) Kosten der Energieerzeugung und Übertragungsverluste

auf die verfügbaren, in Betrieb stehenden Kraftwerke aufgeteilt wird. Um den Rahmen dieser Ausführungen nicht zu sprengen, werden dabei die Aspekte der Netzsicherheitsberechnung nicht behandelt. Dieses Kapitel stellt somit nur die grundsätzliche Problematik der Optimierung vor; es dient als Einführung in die optimale Lastflußberechnung.

Für die weiteren Überlegungen werden folgende einschränkende Voraussetzungen verwendet:

- Die Einsatzplanung der thermischen Kraftwerke bezüglich der Jahres-, Monats- und Tagesoptimierung wird hier nicht behandelt.
- Die Einspeisungen der Wasserkraftwerke sind fest und werden deshalb nicht weiter berücksichtigt.
- Der Schaltzustand und die Parameter des Übertragungsnetzes sind bekannt.
- Die Knotenspannungen U_i werden als konstante Größen angenommen.
- Die Kostenfunktion, deren Minimum bestimmt werden muß, beschreibt die Erzeugungskosten, die durch die Primärenergiekosten vorgegeben sind.

Mathematisch gesehen handelt es sich somit um folgende Aufgabe. Für eine skalare Kostenfunktion C , die die Energieerzeugungskosten beschreibt, ist das Minimum zu bestimmen

$$C = C(P_{G1}, P_{G2}, \dots, P_{Gn_G}) \stackrel{!}{=} \text{Min} . \quad (6.1-1)$$

Dabei sind die Nebenbedingungen in Form der Netzgleichungen

$$f(x, u, p) = 0 \quad (6.1-2)$$

sowie Betriebsgrenzen in Form von Ungleichungen

$$g(x, u, p) \leq 0 \quad (6.1-3)$$

zu berücksichtigen.

6.2 Optimale Lastverteilung ohne Berücksichtigung der Netzverluste

6.2.1 Definition der Kostenfunktion C

Die Kostenfunktion C beschreibt die stündlichen, arbeitsabhängigen Kosten der Stromerzeugung. Sie hat als Einheit DM/h. Die Kostenfunktion C enthält nicht die festen Kosten wie Wartung, Personalkosten und Ausbaukosten, sondern nur die Betriebskosten, die im wesentlichen durch die Brennstoffkosten verursacht werden. Bezeichnet man nun mit c_i die Kosten des Kraftwerkes in Knoten i , so sind die Gesamtkosten aller n_G Kraftwerkeinspeisungen durch

$$C = \sum_{i=1}^{n_G} c_i(P_{Gi}) \quad (6.2-1)$$

gegeben. Dabei sind die einzelnen Kosten c_i

$$c_i = c_i(P_{Gi}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_G \quad (6.2-2)$$

als stetige Funktionen der abgegebenen Wirkleistungen P_{Gi} entsprechend Bild 6.2-1 angenommen. Die Kostenfunktionen c_i werden aufgrund energiewirtschaftlicher Überlegungen aus den Primärenergiekosten, dem Heizwert sowie der erzeugten Energie pro Betriebszeiteinheit bestimmt. Da sie auch den vom Betriebszustand des Kraftwerkes ab-

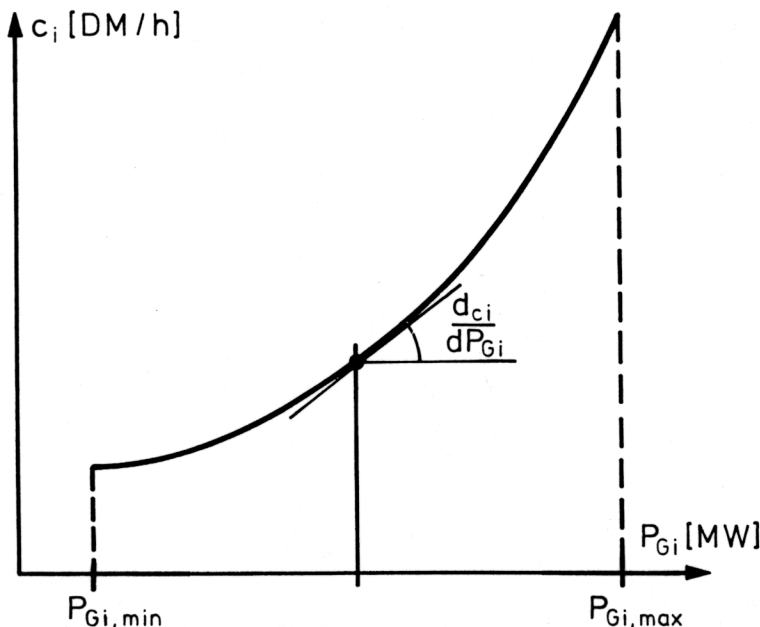


Bild 6.2-1 Verlauf einer Kostenfunktion c_i als quadratische Funktion der erzeugten Wirkleistung P_{Gi}

hängigen Wirkungsgrad beinhalten, sind es im allgemeinen nichtlineare Funktionen, die zwischen der minimal abgebbaren Leistung $P_{Gi, \min}$ und der Nennleistung $P_{Gi, \max}$ definiert sind. Für die weiteren Überlegungen wird für die Kostenfunktion c_i ein Polynom der Form

$$c_i(P_{Gi}) = \alpha_i + \beta_i P_{Gi} + \gamma_i P_{Gi}^2 \quad (6.2-3)$$

verwendet. Im allgemeinen reicht dieser Ansatz aus, da der exakte Kurvenverlauf durch Gl. (6.2-3) hinreichend genau approximiert wird.

6.2.2 Nebenbedingungen

Vom Standpunkt des Energieversorgungssystems können die einzelnen Kraftwerkseinspeisungen P_{Gi} nicht beliebig gewählt werden, da sie die Netzgleichungen bei vorgegebener Last erfüllen müssen. Berücksichtigt man nun, daß die Blindleistungs-Einspeisungen Q_{Gi} die Kostenfunktionen c_i nicht beeinflussen, so können die $2n$ -Netzgleichungen (n = Anzahl der Netzknoten), die als Nebenbedingungen berücksichtigt werden müssen, ersetzt werden durch eine einzige Nebenbedingung, die aussagt, daß die Wirkleistungsbilanz im Gesamtsystem gleich Null sein muß

$$f(P_{G1}, P_{G2}, \dots, P_{Gn}) = \sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - P_L - P_V = 0 \quad (6.2-4)$$

Die gesamte Netzlast P_L ist als Summe der Knotenlasten P_{Li} gegeben

$$P_L = \sum_{i=1}^n P_{Li} \quad (6.2-5)$$

Dabei erstreckt sich diese Summe über alle Netzknoten n .

Da im vorliegenden Zusammenhang die Leitungsverluste P_V zunächst vernachlässigt werden, reduziert sich Gl. (6.2-4) auf

$$f(P_{G1}, P_{G2}, \dots, P_{Gn_G}) = \sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - P_L = 0 \quad (6.2-6)$$

Als weitere Nebenbedingungen sind Ungleichungen zu berücksichtigen, die durch betriebliche Gegebenheiten festgelegt sind. Die Wirkleistungs-Einspeisung eines Kraftwerkblockes kann nur innerhalb fester Grenzen liegen

$$P_{Gi, \min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi, \max} \quad (6.2-7)$$

Will man auch Netzsicherheitsbedingungen berücksichtigen, so sind ferner auch die Grenzen für die Blindleistungen Q_{Gi} , der Spannungsbeträge U_i sowie die Leitungsbelastungen S_{ij} zu beachten.

6.2.3 Lastverteilung auf zwei Kraftwerk-Einspeisungen

In diesem Abschnitt soll ein einfaches Beispiel bestehend aus zwei Kraftwerk-Einspeisungen behandelt werden. Es hat den Vorteil, daß die Lösung des Optimierungsproblems geometrisch veranschaulicht werden kann. Das Resultat wird dann im nächsten Abschnitt auf den allgemeinen Fall mit n_G Kraftwerk-Einspeisungen erweitert. Für $n_G = 2$ lauten die Gln. (6.2-1) und (6.2-6)

$$C = c_1(P_{G1}) + c_2(P_{G2}) \quad (6.2-8)$$

mit der einen Nebenbedingung

$$f(P_{G1}, P_{G2}) = P_{G1} + P_{G2} - P_L = 0 \quad (6.2-9)$$

Die einzelnen Kostenfunktionen c_1 resp. c_2 sind jeweils nur Funktionen von P_{G1} resp. P_{G2} . Sie sind in Bild 6.2-2 dargestellt.

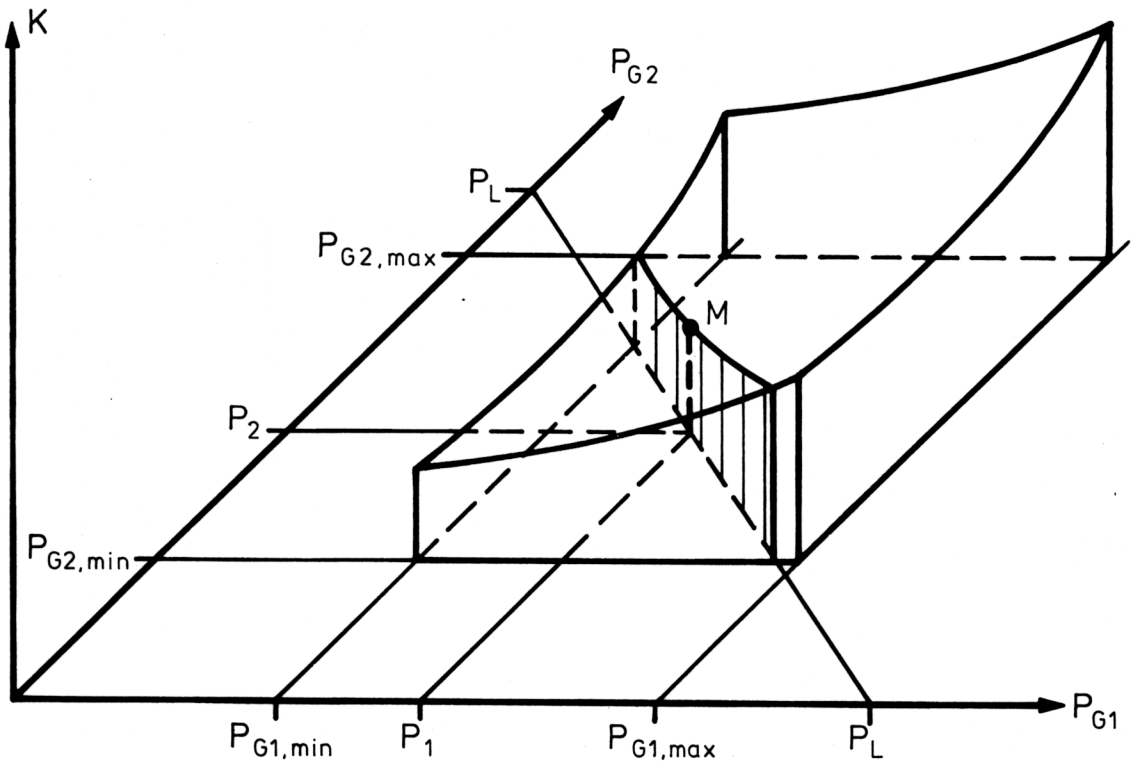


Bild 6.2-2 Verlauf der Kostenfunktionen c_1 und c_2 sowie der Nebenbedingung

Mathematisch wird der Lösungspunkt M so bestimmt, daß die Kostenfunktion C nach Gl. (6.2-8) mit der Nebenbedingung (6.2-9) dadurch erweitert wird, daß man diese mit dem LAGRANGE-Faktor λ multipliziert und zur Kostenfunktion C hinzufügt; d. h.

$$C' = c_1(P_{G1}) + c_2(P_{G2}) - \lambda(P_{G1} + P_{G2} - P_L) \stackrel{!}{=} \min \quad (6.2-10)$$

Neben den beiden unbekannten Systemvariablen P_{G1} und P_{G2} muß man nun auch den zunächst unbekannten Faktor λ bestimmen. Da alle drei Variablen so gewählt werden müssen, daß die in Gl. (6.2-10) formulierte Minimumsbedingung erfüllt ist, können die folgenden drei Optimalitätsbedingungen angegeben werden

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{G1}} = \frac{dc_1}{dP_{G1}} - \lambda = 0 \quad (6.2-11 a)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{G2}} = \frac{dc_2}{dP_{G2}} - \lambda = 0 \quad (6.2-11 b)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = P_{G1} + P_{G2} - P_L = 0 \quad (6.2-12)$$

Setzt man für die einzelnen Kostenfunktionen c_i die quadratischen Ausdrücke von Gl. (6.2-3) ein, so führen diese Bedingungen auf ein lineares Gleichungssystem bestehend aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2 \gamma_1 P_{G1} - \lambda &= 0 \\ \beta_2 + 2 \gamma_2 P_{G2} - \lambda &= 0 \\ P_{G1} + P_{G2} - P_L &= 0 \end{aligned} \quad (6.2-13)$$

mit den drei Unbekannten P_{G1} , P_{G2} und λ .

Aus den beiden Gleichungen (6.2-11 a) und (6.2-11 b) folgt unmittelbar durch Vergleich

$$dc_1/dP_{G1} = dc_2/dP_{G2} = \lambda \quad (6.2-14)$$

Das bedeutet, daß die spezifischen Kosten dc_1/dP_{G1} und dc_2/dP_{G2} ausgedrückt in DM/MW h im Optimumspunkt für beide Kraftwerke gleich sein müssen. Man nennt diese spezifischen Kosten auch Inkremental-Kosten, die im Optimum gleich sein müssen. Der LAGRANGE-Faktor λ ist wertmäßig durch die Inkremental-Kosten festgelegt. Graphisch sind die spezifischen Kosten dc_i/dP_{Gi} durch die Steigung der Kostenfunktion $c_i(P_{Gi})$ gegeben. Sie beschreiben den Kostenzuwachs, wenn die Leistung um dP_{Gi} erhöht wird.

6.2.4 Optimale Lastverteilung für den allgemeinen Fall

Im allgemeinen Fall muß Gl. (6.2-11) statt für zwei nun für n_G Gleichungen der Form

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_G \quad (6.2-15)$$

erfüllt sein. Die durch die Nebenbedingung (6.2-6) mit dem LAGRANGE-Multiplikator modifizierte Kostenfunktion C' lautet nun

$$C' = c_1(P_{G1}) + c_2(P_{G2}) + \dots + c_{n_G}(P_{Gn_G}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - P_L \right) \quad (6.2-16)$$

Die Optimalitätsbedingungen (6.2-15) ergeben nun mit (6.2-16) folgendes, lineares Gleichungssystem bestehend aus $n_G + 1$ Gleichungen

6.2.5 Numerische Berechnung des Optimums

Zunächst soll kurz an Hand von Bild 6.2-3 eine graphische Lösung diskutiert werden. Ausgehend von der Tatsache, daß die optimale Lösung gleiche Zuwachskosten dc_i/dP_{Gi} aller Kraftwerk-Einspeisungen verlangt, wird die optimale Lastverteilung auf der horizontalen Geraden in Bild 6.2-3 gefunden. Im Sinne eines Ansatzes kann man somit einen plausiblen Wert für den LAGRANGE-Multiplikator λ wählen und dann die zugehörigen Einspeisungen P_{Gi} ablesen. Alle Einspeisungen müssen gleich der Summe der gesamten Last P_L sein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muß ein neuer Wert für λ gewählt werden, bis die Leistungsbilanz erfüllt ist.

Mit Hilfe eines einfachen Rechenprogramms kann die wirtschaftliche Lastverteilung in folgenden Schritten erreicht werden.

Schritt 1: Wahl eines Anfangswertes $\lambda^{(0)}$ für den LAGRANGE-Multiplikator, d. h. die Zuwachskosten

Schritt 2: Berechnung der einzelnen Kraftwerks-Einspeisungen $P_{Gi}^{(0)}$ entsprechend den Zuwachskosten dc_i/dP_{Gi} , wie sie in Bild 6.2-3 dargestellt sind. Wählt man für die Kostenfunktion c_i die quadratische Form von Gl. (6.2-3), so erhält man bei vorgegebenen Zuwachskosten $\lambda = dc_i/dP_{Gi}$ die entsprechende Einspeisung gemäß Gl. (6.2-13)

$$\begin{aligned} P_{Gi}^{(0)} &= \frac{1}{2\gamma_i} \left(\frac{dc_i}{dP_{Gi}} - \beta_i \right) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_G \\ &= \frac{1}{2\gamma_i} (\lambda^{(0)} - \beta_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_G . \end{aligned} \quad (6.2-20)$$

Schritt 3: Überprüfung der Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi}^{(0)} = P_L . \quad (6.2-21)$$

Schritt 4: Falls die Beziehung (6.2-21) nicht erfüllt ist, muß ein neuer Wert $\lambda^{(1)}$ gewählt werden und das Verfahren ab Schritt 2 wiederholt werden. Bei der Wahl des neuen Wertes $\lambda^{(1)}$ muß natürlich das Resultat von Schritt 3 berücksichtigt werden, indem zu beachten ist

$$\text{falls } \sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi}^{(0)} < P_L \rightarrow \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda \quad \text{mit} \quad \Delta\lambda > 0 . \quad (6.2-22)$$

Diese Vorgehensweise ist in Bild 6.2-4 an Hand eines Netzes mit drei Einspeisungen graphisch dargestellt.

6.3 Optimale Lastverteilung unter Berücksichtigung der Netzverluste

Die Leitungsverluste können in geographisch kleinen Netzen ohne weiteres vernachlässigt werden. Sie müssen jedoch in größeren Netzen bei der Optimierung beachtet werden, da sie hier einen spürbaren Einfluß auf die wirtschaftliche Lastverteilung haben. Die Berücksichtigung der Netzverluste führt dazu, daß man die einfache Regel der

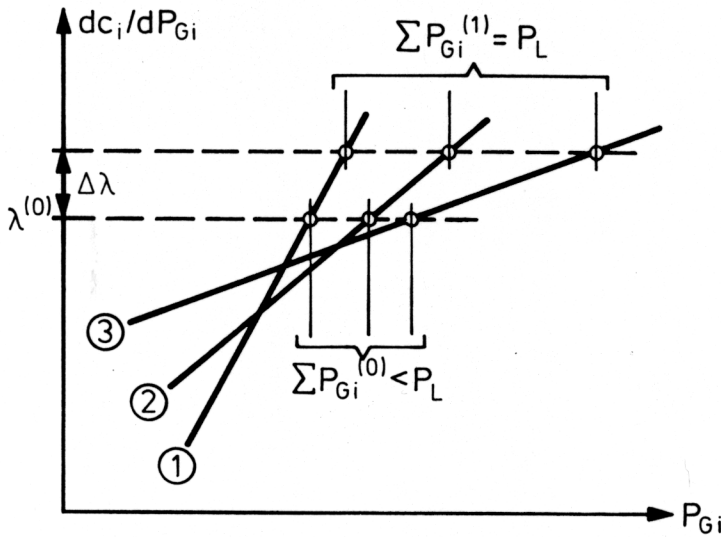


Bild 6.2-4 Graphische Darstellung der wirtschaftlichen Lastverteilung

gleichen Inkremental-Kosten in allen Kraftwerken, wie sie in Abschnitt 6.2 hergeleitet worden ist, nicht mehr verwenden kann. Im folgenden werden bei den Netzverlusten nur die Wirkverluste berücksichtigt.

6.3.1 Optimalitätsbedingung

Die optimale Lastverteilung in Netzen mit nennenswerten Übertragungsverlusten beruht ebenfalls auf der Optimierung der Kostenfunktion (6.2-1). Allerdings muß anstelle der einfachen Nebenbedingung (6.2-6) die allgemeinere Nebenbedingung (6.2-4) mit den Netzverlusten P_V benutzt werden. Unter Verwendung des LAGRANGE-Multiplikators lautet die erweiterte Kostenfunktion C' in diesem Fall

$$C' = \sum_{i=1}^{n_G} c_i(P_{Gi}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - P_L - P_V \right). \quad (6.3-1)$$

Bei der Herleitung der Optimalitätsbedingung wird davon ausgegangen, daß die Spannungsbeträge aller Knotenspannungen konstant sind. Durch die Bildung der partiellen Ableitungen in Gl. (6.3-1) nach allen P_{Gi} sowie dem LAGRANGE-Multiplikator λ erhält man die $(n_G + 1)$ Bedingungen für die optimale Lastverteilung

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{Gi}} = \frac{dc_i}{dP_{Gi}} - \lambda + \lambda \frac{\partial P_V}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_G \quad (6.3-2a)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - P_L - P_V = 0. \quad (6.3-2b)$$

Damit hat man ein Gleichungssystem, um die $n_G + 1$ Unbekannten $P_{G1}, \dots, P_{Gn_G}$ sowie λ zu bestimmen. Die partiellen Ableitungen $\partial P_V / \partial P_{Gi}$ bezeichnet man als Inkremental-Übertragungsverluste. Sie beschreiben die Änderung der Übertragungsverluste P_V , wenn die Kraftwerks-Einspeisung P_{Gi} geändert wird. Die Optimalitätsbedingung lautet nun von Gl. (6.3-2a) ausgehend

$$\lambda = \frac{dc_i/dP_{Gi}}{1 - \partial P_V/\partial P_{Gi}} = \text{konst.} \quad (6.3-3)$$

Man nennt diese Optimalitätsbedingungen die Koordinations-Gleichungen der wirtschaftlichen Lastverteilung. Sie können numerisch ausgewertet werden, wenn die Inkremental-Übertragungsverluste $\partial P_V/\partial P_{Gi}$ bekannt sind. Es ist darauf hinzuweisen, daß für die Bestimmung der Netzverluste P_V eine vollständige Netzberechnung durchgeführt werden muß, da erst die Kraftwerk-Einspeisungen und die Lasten über die Netzgleichungen die Bestimmung von P_V ermöglichen. Will man diese Berechnung umgehen, so ist eine Verlustformel zu entwickeln, die die Bestimmung von P_V aufgrund der Knotenleistungen $P_i + j Q_i$ ermöglicht.

Um die Bedeutung der Koordinations-Gleichungen sowie der Verlustformel zu veranschaulichen, wird im nächsten Abschnitt ein Optimierungsproblem mit zwei Kraftwerk-Einspeisungen untersucht.

6.3.2 Optimale Lastverteilung für zwei Kraftwerk-Einspeisungen

Der Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist das in Bild 6.3-2 gezeigte, zweiknotige Netz mit zwei Kraftwerk-Einspeisungen. Dabei sollen folgende vereinfachende Annahmen getroffen werden.

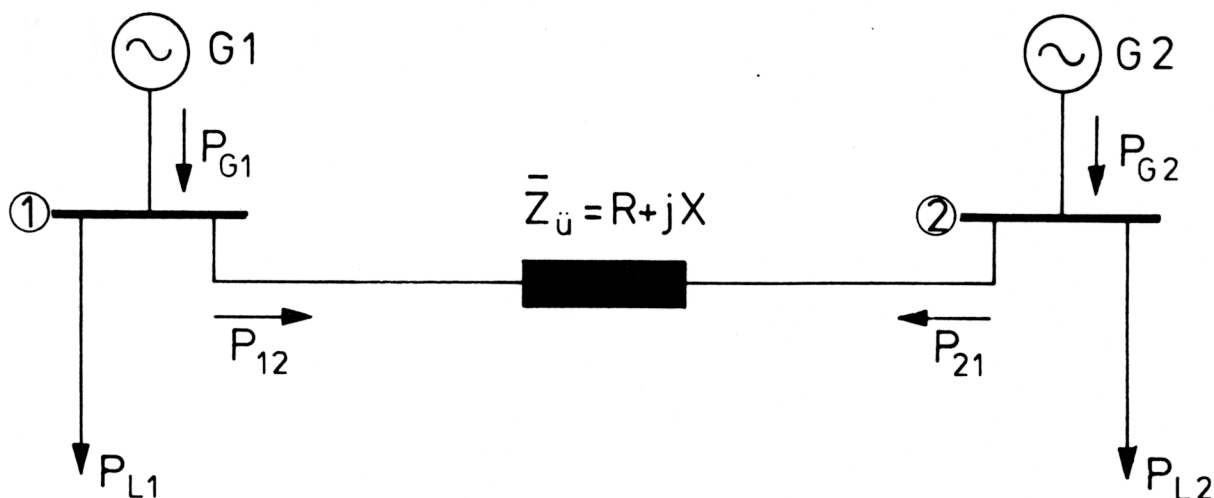


Bild 6.3-2 Zweiknotiges Netz mit Übertragungsverlusten

1. Die Leitung wird nur durch eine Längsimpedanz $\bar{Z}_u = R + jX$ beschrieben, wobei $X^2 \gg R^2$ gilt. Dies ist für Freileitungen im allgemeinen erfüllt.
2. Die Verlustleistung P_V ist wesentlich kleiner als die Kraftwerk-Einspeisungen P_{G1} resp. P_{G2} und die Lasten P_{L1} resp. P_{L2} .
3. Es wird angenommen, daß die Spannungsbeträge in beiden Netzknoten gleich groß sind: $U_1 = U_2 = 1,0$.
4. Der Spannungswinkel δ zwischen den beiden komplexen Spannungen $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ soll so klein sein, daß die Approximationen $\sin \delta \approx \delta$ und $\cos \delta \approx 1 - \delta^2/2$ benutzt werden können. Dabei gilt $\delta = \delta_1 - \delta_2$.
5. Die beiden Generatoren seien bezüglich der Erzeugungskosten identisch und werden deshalb durch die gleiche Inkremental-Kostenkurve beschrieben.

$$dc_i/dP_{Gi} = \beta_i + 2 \gamma_i P_{Gi} . \quad (6.3-4)$$

Der Wirkleistungsfluß P_{12} von Knoten 1 nach 2 resp P_{21} von Knoten 2 nach 1 ist durch die folgenden beiden Ausdrücke gegeben, wenn die oben genannten trigonometrischen Approximationen unmittelbar benutzt werden (siehe auch Gl. (2.4-9))

$$\begin{aligned} P_{12} &= P_{G1} - P_{L1} = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta^2/2 + \frac{X}{R^2 + X^2} \delta \\ P_{21} &= P_{G2} - P_{L2} = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta^2/2 - \frac{X}{R^2 + X^2} \delta . \end{aligned} \quad (6.3-5)$$

Die Übertragungsverluste P_V erhält man als Summe dieser beiden Leistungsflüsse

$$P_V = P_{12} + P_{21} = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta^2 . \quad (6.3-6)$$

Somit lassen sich in diesem Beispiel die Inkremental-Verluste $\partial P_V / \partial P_{Gi}$ wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_V}{\partial P_{G1}} &= \frac{\partial P_V}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} = \frac{2R}{R^2 + X^2} \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} \\ \frac{\partial P_V}{\partial P_{G2}} &= \frac{\partial P_V}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} = \frac{2R}{R^2 + X^2} \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} . \end{aligned} \quad (6.3-7)$$

Die hier auftretenden partiellen Ableitungen $\partial \delta / \partial P_{Gi}$ für $i = 1, 2$ erhält man aus Gl. (6.3-5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{12}}{\partial P_{G1}} &= 1 = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} + \frac{X}{R^2 + X^2} \frac{\partial \delta}{\partial P_{G1}} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial P_{G2}} &= 1 = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} - \frac{X}{R^2 + X^2} \frac{\partial \delta}{\partial P_{G2}} . \end{aligned} \quad (6.3-8)$$

Damit lassen sich nun die beiden partiellen Ableitungen bestimmen

$$\frac{\partial \delta}{\partial P_{Gi}} = \frac{R^2 + X^2}{R \delta \pm X} \quad \text{für } i = 1: +; \quad \text{für } i = 2: - . \quad (6.3-9)$$

Substitution von Gl. (6.3-9) in Gl. (6.3-7) ergibt

$$\frac{\partial P_V}{\partial P_{Gi}} = 2R \frac{\delta}{R \delta \pm X} \quad \text{für } i = 1: +; \quad \text{für } i = 2: - . \quad (6.3-10)$$

Da nach Vereinfachung 1 das Verhältnis von Leitungsreaktanz zu -widerstand sehr viel größer als eins ist, erhält man schließlich für die gesuchten Inkremental-Verluste

$$\frac{\partial P_V}{\partial P_{Gi}} \approx \pm 2 \frac{R}{X} \delta \quad \text{für } i = 1: +; \quad \text{für } i = 2: - . \quad (6.3-11)$$

Damit sind die Inkremental-Verluste durch den Spannungswinkel δ zwischen den beiden komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ ausgedrückt. Man kann δ auch mit der übertragenen Wirkleistung P_{12} ausdrücken und so auf die explizite Bestimmung von δ verzichten. Näherungsweise gilt

$$P_{12} = \frac{U_1 U_2}{X} \sin \delta \approx \delta / X . \quad (6.3-12)$$

Da im Knoten 1 die Wirkleistung-Bilanz

$$P_{G1} - P_{L1} = P_{12} \quad (6.3-13)$$

gilt, folgt schließlich mit Gl. (6.3-12) und (6.3-13) für die Inkremental-Verluste

$$\frac{\partial P_V}{\partial P_{Gi}} = \pm 2 R P_{12} = \pm 2 R (P_{G1} - P_{L1}) . \quad (6.3-14)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Optimalitätsbedingung ein, erhält man

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{G1}} = \beta_1 + 2 \gamma_1 P_{G1} = \lambda (1 - 2 R (P_{G1} - P_{L1})) \quad (6.3-15)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial P_{G2}} = \beta_2 + 2 \gamma_2 P_{G2} = \lambda (1 + 2 R (P_{G1} - P_{L1})) \quad (6.3-16)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = P_{G1} + P_{G2} - P_{L1} - P_{L2} - P_V = P_{G1} + P_{G2} - P_{L1} - P_{L2} - R (P_{G1} - P_{L1})^2 = 0 , \quad (6.3-17)$$

wobei in der letzten Beziehung von Gl. (6.3-6) in der Form

$$P_V = \frac{R}{R^2 + X^2} \delta^2 \approx \frac{R}{X^2} \delta^2 = R P_{12}^2 = R (P_{G1} - P_{L1})^2 \quad (6.3-18)$$

Gebrauch gemacht worden ist; d. h. Gl. (6.3-17) lautet nun

$$P_{G1} + P_{G2} = P_{L1} + P_{L2} + R (P_{G1} - P_{L1})^2 . \quad (6.3-19)$$

Mit den nichtlinearen Gleichungen (6.3-15), (6.3-16) und (6.3-19) können die drei Unbekannten P_{G1} , P_{G2} und λ bestimmt werden.

6.3.3 Verallgemeinerung der Optimalitätsbedingungen

Das einfache Beispiel von Abschnitt 6.3.2 hat gezeigt, daß bei Berücksichtigung der Übertragungsverluste bei der optimalen Lastverteilung folgende Eigenschaften auftreten:

1. die einzelnen Generatoren werden mit unterschiedlichen Inkremental-Kosten betrieben;

2. diejenigen Generatoren, die durch große Inkremental-Verluste ($\partial P_V / \partial P_{Gi}$) gekennzeichnet sind, werden mit den geringsten Zuwachskosten dc_i/dP_{Gi} betrieben;
3. während die Inkremental-Kosten nur positive Werte annehmen können, können die Inkremental-Verluste sowohl positive wie auch negative Werte annehmen.

So wie Bild 6.2-3 die verlustlose Optimierung beschreibt, so zeigt Bild 6.3-3 eine graphische Darstellung der Optimierung unter Berücksichtigung der Übertragungsverluste P_V . Dabei wird deutlich gemacht, daß für die Bestimmung der einzelnen Generatorleistungen P_{Gi} die einzelnen Inkremental-Verluste bekannt sein müssen. Für deren Bestimmung muß zuerst untersucht werden, wie die Netzverluste P_V in Abhängigkeit der Aufteilung der Erzeugung P_{Gi} auf die Kraftwerk-Einspeisungen variieren.

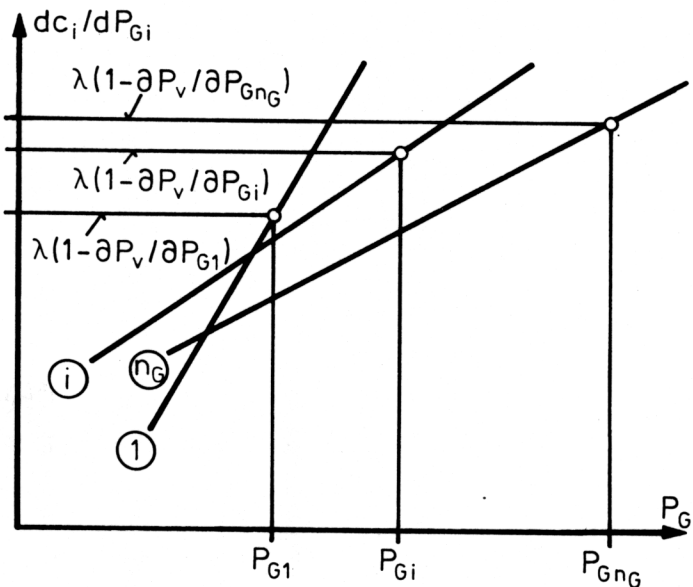


Bild 6.3-3 Graphische Darstellung der optimalen Lastverteilung unter Berücksichtigung der Übertragungsverluste

Die Herleitung einer allgemeinen Verlustformel für die Berechnung der Übertragungsverluste beginnt mit der Überlegung, daß die Summe aller erzeugten und aller verbrauchten Wirkleistungen gleich den Verlusten des Übertragungsnetzes sein muß; d. h. man kann unter Beachtung des Vorzeichens die Verluste als Summe über alle Netto-Knotenleistungen bestimmen

$$\bar{S}_V = P_V + jQ_V = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i = \sum_{i=1}^n \bar{U}_i \bar{I}_i^* \quad (6.3-20)$$

Dabei bezeichnet $\bar{U}_i$ die komplexe Knotenspannung in Knoten i und $\bar{I}_i^*$ den konjugiert-komplexen Knotenstrom. Den letzten Ausdruck in Gl. (6.3-20) kann man als skalares Produkt der beiden komplexen Vektoren U_k und I_k schreiben. Dabei bezeichnet der Index k Knoten bezogene Größen

$$P_V + jQ_V = U_k^T I_k^* \quad (6.3-21)$$

Die Knotenspannungen und -ströme U_k resp. I_k sind – wie in Kapitel 2 ausgeführt – über die Knotenimpedanzmatrix Z_k miteinander verbunden

$$U_k = Z_k I_k . \quad (6.3-22)$$

Damit kann Gl. (6.3-21) umgeschrieben werden

$$P_V + j Q_V = (Z_k I_k)^T I_k^* = I_k^T Z_k I_k^* . \quad (6.3-23)$$

Die letzte Beziehung in Gl. (6.3-23) ergibt sich aus der Tatsache, daß Z_k eine symmetrische Matrix ist; d. h. $Z_k = Z_k^T$.

Die Knotenimpedanzmatrix Z_k ist durch die inverse Knotenadmittanzmatrix $Y_k = Z_k^{-1}$ gegeben. Sie kann als Summe von Real- und Imaginärteil geschrieben werden

$$Z_k = R + jX = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} . \quad (6.3-24)$$

Zerlegt man die komplexen Knotenströme $\bar{I}_i$ in Wirk- und Blindstrom I_{pi} resp I_{qi} , so gilt allgemein

$$I_k = I_p + jI_q = \begin{bmatrix} I_{p1} \\ \vdots \\ I_{pn} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} I_{q1} \\ \vdots \\ I_{qn} \end{bmatrix} . \quad (6.3-25)$$

Damit kann nun Gl. (6.3-23) wie folgt geschrieben werden

$$P_V + j Q_V = (I_p + jI_q)^T (R + jX) (I_p - jI_q) . \quad (6.3-26)$$

Die Wirkverluste P_V sind durch den Realteil gegeben

$$P_V = I_p^T R I_p + I_p^T X I_q + I_q^T R I_q - I_q^T X I_p . \quad (6.3-27)$$

Weil X eine symmetrische Matrix ist, läßt sich leicht zeigen, daß der zweite und vierte Term in Gl. (6.3-27) gleich sind; d. h. die Verlustformel kann wie folgt geschrieben werden

$$P_V = I_p^T R I_p + I_q^T R I_q , \quad (6.3-28 a)$$

was in ausführlicher Schreibweise zum Ausdruck

$$P_V = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n r_{jk} (I_{pj} I_{pk} + I_{qj} I_{qk}) \quad (6.3-28 b)$$

führt. Die Bedeutung von Gl. (6.3-28) liegt darin, daß damit die gesamten Netzverluste aufgrund der Knotenströme I_k ohne Lösung der Netzgleichungen bestimmt werden können. Normalerweise sind nicht die Knotenströme sondern die Knotenleistungen bekannt; d. h. aus der Beziehung zwischen den Knotenleistungen, -spannungen und -strömen werden die Knotenströme eliminiert. Es gilt

$$P_i + j Q_i = \bar{U}_i \bar{I}_i^* = \bar{U}_i (I_{pi} - j I_{qi}) = U_i (\cos \delta_i + j \sin \delta_i) (I_{pi} - j I_{qi}) . \quad (6.3-29)$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil für die Knotenströme I_{pi} und I_{qi} ergibt somit

$$I_{pi} = (1/U_i)(P_i \cos \delta_i + Q_i \sin \delta_i) \quad (6.3-30a)$$

$$I_{qi} = (1/U_i)(P_i \sin \delta_i - Q_i \cos \delta_i) . \quad (6.3-30b)$$

Ersetzt man diese Ausdrücke für die Ströme in den Verlustbeziehungen (6.3-28), so erhält man nach kurzer Umrechnung für die Verlustformel

$$P_V = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\alpha_{jk} (P_j P_k + Q_j Q_k) + \beta_{jk} (Q_j P_k - P_j Q_k)) , \quad (6.3-31)$$

wobei die Parameter α_{jk} und β_{jk} wie folgt definiert sind

$$\alpha_{jk} = \frac{r_{jk}}{U_j U_k} \cos(\delta_j - \delta_k) \approx r_{jk} \quad (6.3-32)$$

$$\beta_{jk} = \frac{r_{jk}}{U_j U_k} \sin(\delta_j - \delta_k) \approx r_{jk} \delta_{jk} .$$

Dabei ist δ_{jk} die Winkeldifferenz $\delta_j - \delta_k$, wie sie z. B. mit einer Gleichstrom-Lastflußberechnung bestimmt werden kann. U_j und U_k sind bezogene Größen.

Im nächsten Schritt muß nun ein allgemeiner Ausdruck für die Inkremental-Übertragungsverluste ($\partial P_V / \partial P_{Gi}$) abgeleitet werden. Definitionsgemäß gilt mit Gl. (6.3-31)

$$\frac{\partial P_V}{\partial P_{Gi}} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial P_i} (\alpha_{jk} (P_j P_k + Q_j Q_k) + \beta_{jk} (Q_j P_k - P_j Q_k)) , \quad (6.3-33)$$

wobei die Ableitung auf der rechten Seite statt nach P_{Gi} nach P_i durchgeführt wird. Dies ist in so fern zulässig, als daß $P_i = P_{Gi} - P_{Li}$ definiert ist und $P_{Li} =$ konstant angenommen wird. Nimmt man nun an, daß die Ableitungen $\partial \alpha_{jk} / \partial P_i \approx 0$ und $\partial \beta_{jk} / \partial P_i \approx 0$ sind, so erhält man für die gesuchten Inkremental-Verluste in guter Näherung unter gleichzeitiger Ausnutzung der Eigenschaft

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj} \quad \text{und} \quad \beta_{jk} = -\beta_{kj} \quad (6.3-34)$$

die Beziehung

$$\partial P_V / \partial P_{Gi} = 2 \sum_{k=1}^n (P_k \alpha_{ik} - Q_k \beta_{ik}) . \quad (6.3-35)$$

Damit kann nun die Optimalitätsbedingung (6.3-3) als System von $n_G + 1$ nichtlinearen Gleichungen aufgestellt werden. Im nächsten Abschnitt wird auf die numerische Lösung dieses Gleichungssystems und damit der Ermittlung der optimalen Lastverteilung eingegangen.

6.3.4 Numerische Berechnung der optimalen Lastverteilung

Die n_G Gl. (6.3-3) der Optimalitätsbedingung sowie die Leistungsbilanz (6.2-4) der Nebenbedingung definieren die n_G optimalen Kraftwerk-Einspeisungen P_{Gi} sowie den Wert des LAGRANGE-Multiplikators λ . Die Berechnung des Optimums ist im Vergleich zum verlustlosen Fall etwas komplizierter, denn die Optimalitätsbedingungen enthalten die Verlustformel, die erst nach einer vollständigen Lastflußberechnung ausgewertet werden kann. Das Optimierungsprogramm für die Bestimmung der wirtschaftlichen Lastverteilung unter Berücksichtigung der Netzverluste hat folgende Struktur:

1. Ausgehend von den für die Lastflußberechnung üblichen Knoten- und Leitungsspezifikationen werden in Abhängigkeit vom Knotentyp die entsprechenden Größen berechnet und für die Lösung der Optimalitätsbedingung bereitgestellt

Referenzknoten: Wirk- und Blindleistung P_1 resp. Q_1

$P-U$ -Knoten: Blindleistung Q_i und Spannungswinkel δ_i

$P-Q$ -Knoten: Spannungsbetrag U_i und Spannungswinkel δ_i

2. Damit werden die Netzverluste P_V auf der Basis von Gl. (6.3-31) sowie die Inkremental-Verluste $\partial P_V / \partial P_i$ für $i = 1, 2, \dots, n_G$ mit Gl. (6.3-35) bestimmt
3. Das nichtlineare Gleichungssystem (6.3-2) kann nun aufgestellt und gelöst werden.
4. Das Ergebnis aus Schritt 3 ergibt neue Kraftwerk-Einspeisungen P_{Gi} , mit denen das Verfahren ab Schritt 1 wiederholt werden muß, bis die Konvergenz des Iterationsverfahrens festgestellt wird.

Aufgaben

Aufgabe 6.1

Für ein Energieversorgungssystem soll für den verlustlosen Fall die optimale, wirtschaftliche Lastverteilung bestimmt werden. Dabei handelt es sich um ein System mit drei Kraftwerk-Einspeisungen, deren Betriebskosten wie folgt ermittelt worden sind

$$\text{Kraftwerk 1: } c_1(P_{G1}) = 0,01 P_{G1}^2 + 5,0 P_{G1} + 360$$

$$\text{Kraftwerk 2: } c_2(P_{G2}) = 0,02 P_{G2}^2 + 4,0 P_{G2} + 300$$

$$\text{Kraftwerk 3: } c_3(P_{G3}) = 0,02 P_{G3}^2 + 3,0 P_{G3} + 200 \quad .$$

Die gesamte, zu versorgende Last beträgt $P_L = 975$ MW. Für die Bestimmung der wirtschaftlichen Lastverteilung ist eine graphische Lösung anzugeben.

- Wie groß sind im optimalen Betriebspunkt die Wirkleistungs-Einspeisungen der drei Kraftwerke und wie groß sind die Inkremental-Kosten in diesem Fall?
- Wie hoch sind in diesem Fall die drei Einzel- sowie die Gesamtkosten für die Stromerzeugung im optimalen Betriebspunkt?
- Wie hoch sind dazu im Vergleich die Kosten, wenn die gesamte Last P_L gleichmäßig auf die drei Kraftwerks-Einspeisungen verteilt würde?

Aufgabe 6.2

Bild Ü 6.2-1 zeigt ein Netz mit zwei Kraftwerk-Einspeisungen, die über eine Leitung miteinander verbunden sind.

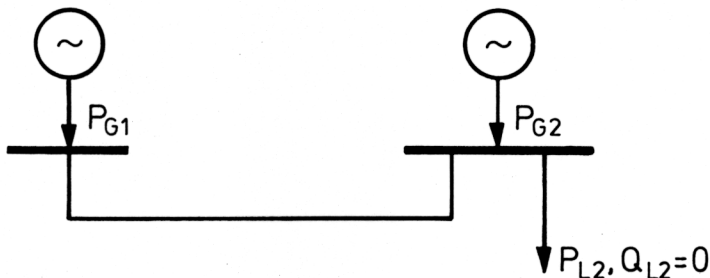


Bild Ü 6.2-1 Zweiknotiges Netz mit zwei Kraftwerk-Einspeisungen

In Knoten 2 ist eine Last P_{L2} zu versorgen. Die Übertragungsleitung hat 10% Verluste; d.h. bei 100 MW übertragener Leistung ist mit 10 MW Verlusten zu rechnen.

- Gesucht ist die Lastaufteilung auf die beiden Einspeisungen, wenn der LAGRANGE-Multiplikator $\lambda = 6,00$ DM/MW h vorgegeben wird. Die Inkremental-Kosten der beiden Einspeisungen sind durch

$$dc_1/dP_{G1} = 0,007 P_{G1} + 4,10 \text{ DM/MW h}$$

$$dc_2/dP_{G2} = 0,014 P_{G2} + 4,60 \text{ DM/MW h}$$

gegeben. Die in Knoten 2 zu versorgende Last P_{L2} ist aus λ und P_V zu bestimmen.

- b) Mit welchen Kostenänderungen ist zu rechnen, wenn die Übertragungsverluste bei der optimalen Lastaufteilung zunächst vernachlässigt und dann berücksichtigt werden? Dabei soll mit der in Aufgabe a) berechneten Last gearbeitet werden.

Aufgabe 6.3

Ausgehend von dem in Bild Ü 6.3-1 dargestellten Netz mit fünf Knoten und 7 Leitungen ist mit Hilfe eines Rechenprogramms die wirtschaftliche Lastverteilung unter Berücksichtigung der Übertragungsverluste zu ermitteln.

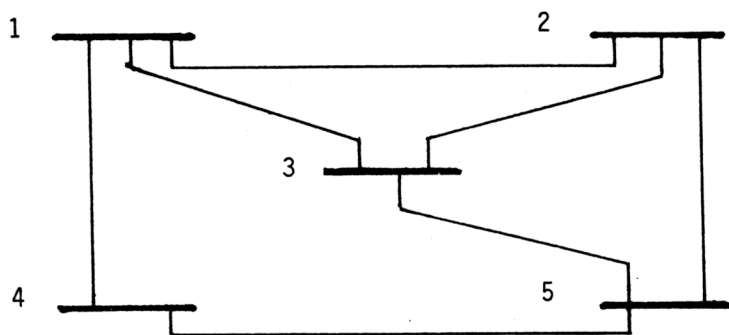


Bild Ü 6.3-1 Fünfknotiges Netz zur optimalen Lastverteilung

Die Leitungsdaten sind aus Tabelle 6-1 und die Knotendaten aus Tabelle 6-2 zu entnehmen.

Tabelle 6-1 Leitungsdaten

Anfangsknoten	Endknoten	R	X	$\omega C/2$	$\frac{I_{\text{Nenn}}}{A}$
1	2	0,0408	0,3146	0,0740	1200
1	3	0,0308	0,2375	0,0558	1200
1	4	0,0417	0,3216	0,0756	1200
2	3	0,0237	0,1824	0,0429	1200
2	5	0,0364	0,2808	0,0660	1200
3	5	0,0178	0,1369	0,0322	1200
4	5	0,0571	0,4401	0,1035	1200

Tabelle 6-2 Knotendaten

Knoten	Knotentyp	Last		U -Betrag	Generator
		MW	MVar		
1	$U-\delta$	230	0	1,05	ja
2	$P-Q$	200	130	unbekannt	nein
3	$P-U$	165	42	1,02	ja
4	$P-Q$	170	28	unbekannt	nein
5	$P-U$	210	76	1,02	ja

Die Blindleistungsgrenzen sind mit $Q_{\min} = -200$ MVar und $Q_{\max} = 200$ MVar anzusetzen. Als Bezugsgrößen sollen $S_B = 100$ MVA und $U_B = 138$ kV verwendet werden.

In das Netz speisen 3 Generatoren an den Knoten 1, 3 und 5 ein. Die Kostenkurven der drei Kraftwerke sind aus Aufgabe 6.1 zu entnehmen. Dabei entspricht der Generator an Knoten 1 der Kostenfunktion c_1 , derjenige an Knoten 3 der Kostenfunktion c_2 und derjenige an Knoten 5 der Kostenfunktion c_3 .

Als Startwerte für die iterative Lösung der Netzoptimierung ist von einer gleichmäßigen Verteilung der Last auf die drei Kraftwerks-Einspeisungen auszugehen.

7 Symmetrische Kurzschluß-Strom-Berechnung

7.1 Einleitung

Die Berechnung symmetrischer Fehler (dreipoliger Kurzschluß) in einem Drehstromsystem spielt bei der Netzausbauplanung wie auch bei der Betriebsplanung eine wichtige Rolle. Der dreipolige Kurzschluß wird durch eine leitende Verbindung der drei Leiter gegen Erde verursacht. Er führt von allen möglichen Fehlern immer zum größten Fehlerstrom. Seine Kenntnis ist in zweierlei Hinsicht wichtig:

- Die Abschaltleistung der Leistungsschalter muß so bemessen sein, daß in jedem Betriebszustand eine sichere Unterbrechung der möglichen Fehlerströme gewährleistet wird.
- Die zuverlässige Einstellung der Netzschutzeinrichtungen erfordert die Kenntnis der Fehlerströme, um sowohl amplituden- wie auch zeitgerecht reagieren zu können.

Im Gegensatz zu den bisherigen Netzberechnungen wird in diesem Kapitel kein stationärer Betriebszustand berechnet. Vielmehr ist das Ziel der Kurzschluß-Strom-Berechnung die Bestimmung der Fehlerströme. Dabei wird jedoch nicht deren zeitlicher Verlauf als Lösung einer Differentialgleichung bestimmt. Für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. 3 bis 6 Perioden, d. h. $60 \cdot \dots \cdot 120$ ms, nach Auftreten des Fehlers wird der Kurzschlußstrom mit Hilfe algebraischer Gleichungen, die auf der Netzwerktheorie beruhen, berechnet. Von großer Bedeutung sind ferner der Anfangs-Kurzschlußstrom I_k'' sowie der stationäre Kurzschlußstrom I_k .

Die Berechnung symmetrischer Kurzschlußfehler basiert auf der einphasigen Darstellung des Drehstromsystems. Somit können die in Kapitel 2 vorgestellten Modelle für die Betriebselemente elektrischer Energieversorgungssysteme verwendet werden. Im nächsten Kapitel werden unsymmetrische Fehler, wie z. B. der einpolige Erdkurzschluß, mit Hilfe der symmetrischen Komponenten behandelt. Bei symmetrischen, dreipoligen Fehlern kann stets mit dem Mitsystem allein gearbeitet werden.

Falls die Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}^f$ an der Fehlerstelle zwischen dem Leiter und Erde gleich Null ist, spricht man von einem satten Kurzschluß. Im allgemeinen Fall ist jedoch $\bar{Z}^f \neq 0$, da der im Kurzschlußfall auftretende Lichtbogen einen bestimmten Widerstand hat.

In den nächsten beiden Abschnitten werden zwei Möglichkeiten zur Berechnung des Kurzschlußstromes behandelt. In Abschnitt 7.2 wird ein Ersatzschaltbild hergeleitet, das den Synchrongenerator und -motor im Kurzschlußfall beschreibt. Zusammen mit der Netzreaktanz kann damit für einfachere Fälle der Kurzschlußstrom berechnet werden. Die zweite Berechnungsart basiert auf dem Netzwerktheorem der Ersatzspannungsquelle nach THEVENIN. Sie wird in Abschnitt 7.3 vorgestellt. Sie bildet die Voraussetzung für die allgemeine Vorgehensweise zur Kurzschluß-Strom-Berechnung mit Hilfe der Knotenimpedanzmatrix, die in Abschnitt 7.5 behandelt wird.

7.2 Kurzschluß-Strom-Berechnung mit Ersatzschaltung

7.2.1 Leerlaufender Synchrongenerator

Für die Berechnung des symmetrischen Kurzschlußstromes mit Hilfe algebraischer Gleichungen ist zu beachten, daß der Synchrongenerator nicht mit Hilfe einer konstanten Maschinenreaktanz modelliert werden kann. Bild 7.2-1 zeigt den typischen Verlauf eines Kurzschlußstromes, der an den Klemmen eines Drehstromgenerators gemessen worden ist.

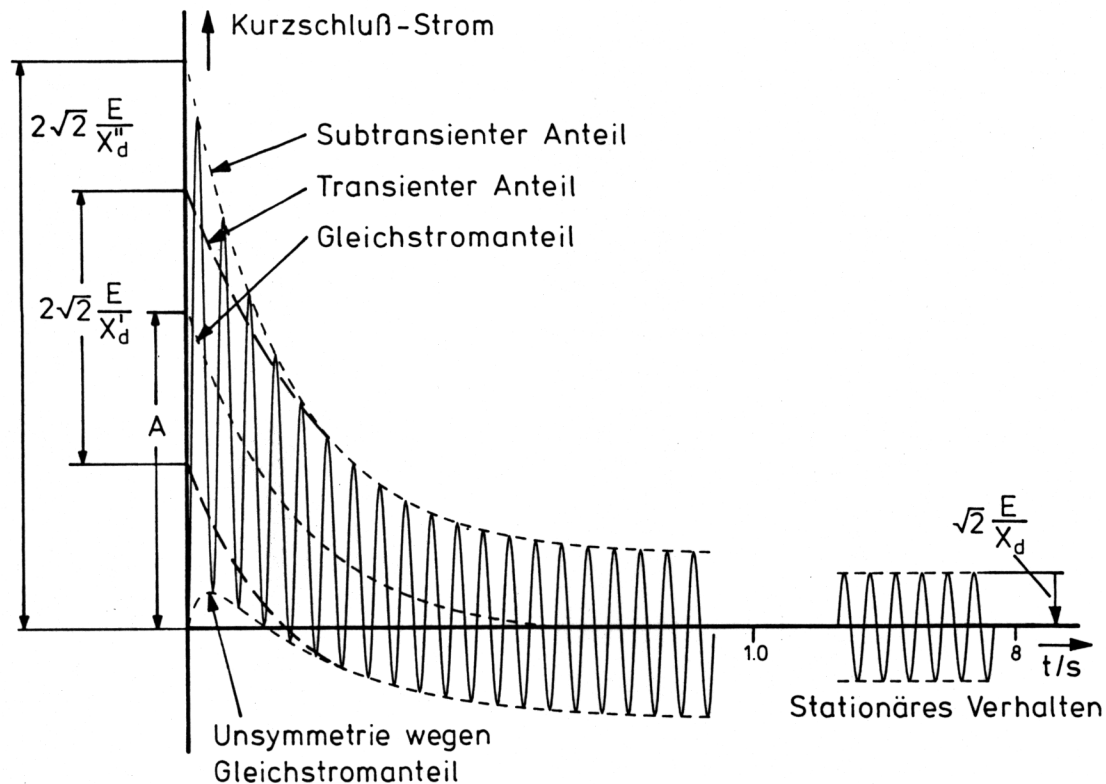


Bild 7.2-1 Zeitlicher Verlauf des Kurzschluß-Stromes mit eingezeichneten Hüllkurven

- Anfangs-Kurzschluß-Wechselstrom (subtransienter Anteil) I_k''
- Transienter Kurzschluß-Wechselstrom I_k'
- Anfangswert des Gleichstromes $A \sim \sqrt{2} I_k''$
- Dauerkurzschluß-Strom I_k

Zu beachten ist, daß wegen des Gleichstromanteiles zunächst kein natürlicher Stromnulldurchgang auftritt, so daß der Fehlerstrom nur verzögert abgeschaltet werden kann

Betrachtet man zunächst Fehler, die bei leerlaufendem Generator auftreten, so erhält man unmittelbar nach Auftreten des Kurzschlusses für den Anfangs-Kurzschlußstrom, der auch als subtransienter Kurzschlußstrom bezeichnet wird,

$$\bar{I}_k'' = \bar{E}_G^0 / j X_d'' \quad (7.2-1)$$

Dabei ist $\bar{E}_G^0$ die vor dem Fehler vorhandene, stationäre Polradspannung, die ja mit der Leerlaufspannung an den Maschinenklemmen übereinstimmt. Die subtransiente Maschinenreaktanz X_d'' ist durch die Bauform des Generators bestimmt.

Gemäß Bild 7.2-1 ist I_k' der Effektivwert des Kurzschlußstromes im Augenblick, in dem der Kurzschlußfehler auftritt ($t = 0$). Stoßkurzschluß-, Ausschaltwechsel- und Dauerkurzschlußstrom werden mit Hilfe von Faktoren, die in den VDE Vorschriften 0102 resp. 0530 festgelegt worden sind, berechnet. Für weitere Einzelheiten wird auf diese Vorschriften verwiesen.

Im Zeitpunkt 3 bis 6 Perioden nach Auftreten des Fehlers hat sich I_k' auf den Wert des transienten Kurzschlußstromes

$$\bar{I}_k = \bar{E}_G^0 / j X_d' \quad (7.2-2)$$

verringert. Dabei ist X_d' die transiente Maschinenreaktanz. Schließlich lautet der sich einstellende stationäre Fehlerstrom, der natürlich vorzeitig abgeschaltet werden muß, wenn Zerstörungen verhindert werden sollen,

$$\bar{I}_k = \bar{E}_G^0 / j X_d \quad (7.2-3)$$

Dabei ist X_d die Längsreaktanz des Generators.

Befindet sich der Fehlerort F unmittelbar in der Nähe des Synchrongenerators, so ist der Einfluß der zeitlich sich ändernden Maschinenreaktanzen maßgebend. Je weiter der Fehlerort F vom Synchrongenerator entfernt ist, um so geringer ist dieser Einfluß, da nun die Netzreaktanz dominiert. Für die Berechnung der Fehlerströme sind im Nenner der Gln. (7.2-1) bis (7.2-3) zu den Maschinenreaktanzen die Netzimpedanzen $\bar{Z}_N$, die zwischen Maschine und Fehlerort F sind, zu addieren. Dadurch lautet der Ausdruck für den Anfangs-Kurzschlußstrom

$$\bar{I}_k' = \frac{\bar{E}_G^0}{j X_d' + \bar{Z}_N} \quad (7.2-4)$$

Die Bestimmung der Netzimpedanz $\bar{Z}_N$ beruht auf der Stern-Dreieck-Umwandlung sowie der Zusammenfassung von Parallel- und Reihenschaltungen der Impedanzen, die das Netz zwischen Generator und Fehlerstelle beschreiben. Der damit verbundene Aufwand ist für größere, vermaschte Netze beträchtlich, so daß dann die systematische Vorgehensweise nach Abschnitt 7.5 vorzuziehen ist.

Tabelle 7-1 enthält typische Werte in bezogener Darstellung für die bisher genannten Synchrongenerator-Reaktanzen.

Tabelle 7-1 Synchronmaschinen-Reaktanzen für Fehlerstromberechnungen

Reaktanz	Turboläufer	Wasserkraft- generator	Synchronmotor	
			langsam	schnell
X_d	1,15	1,00	1,00	0,80
X_d'	0,15	0,30	0,35	0,30
X_d''	0,10	0,20	0,20	0,18

7.2.2 Allgemeiner Belastungszustand

Die bisherigen Überlegungen müssen nun dahingehend verallgemeinert werden, daß vor Auftreten des Kurzschlußfehlers ein beliebiger Belastungszustand angenommen

werden kann. Dadurch wird die Klemmenspannung des Synchrongenerators $\bar{U}_G$ nicht mehr mit der Polradspannung $\bar{E}^0$ phasengleich sein. Für die Berechnung des Fehlerstromes $\bar{I}_k'$ wird von der in Bild 7.2-2 gezeigten Ersatzschaltung ausgegangen.

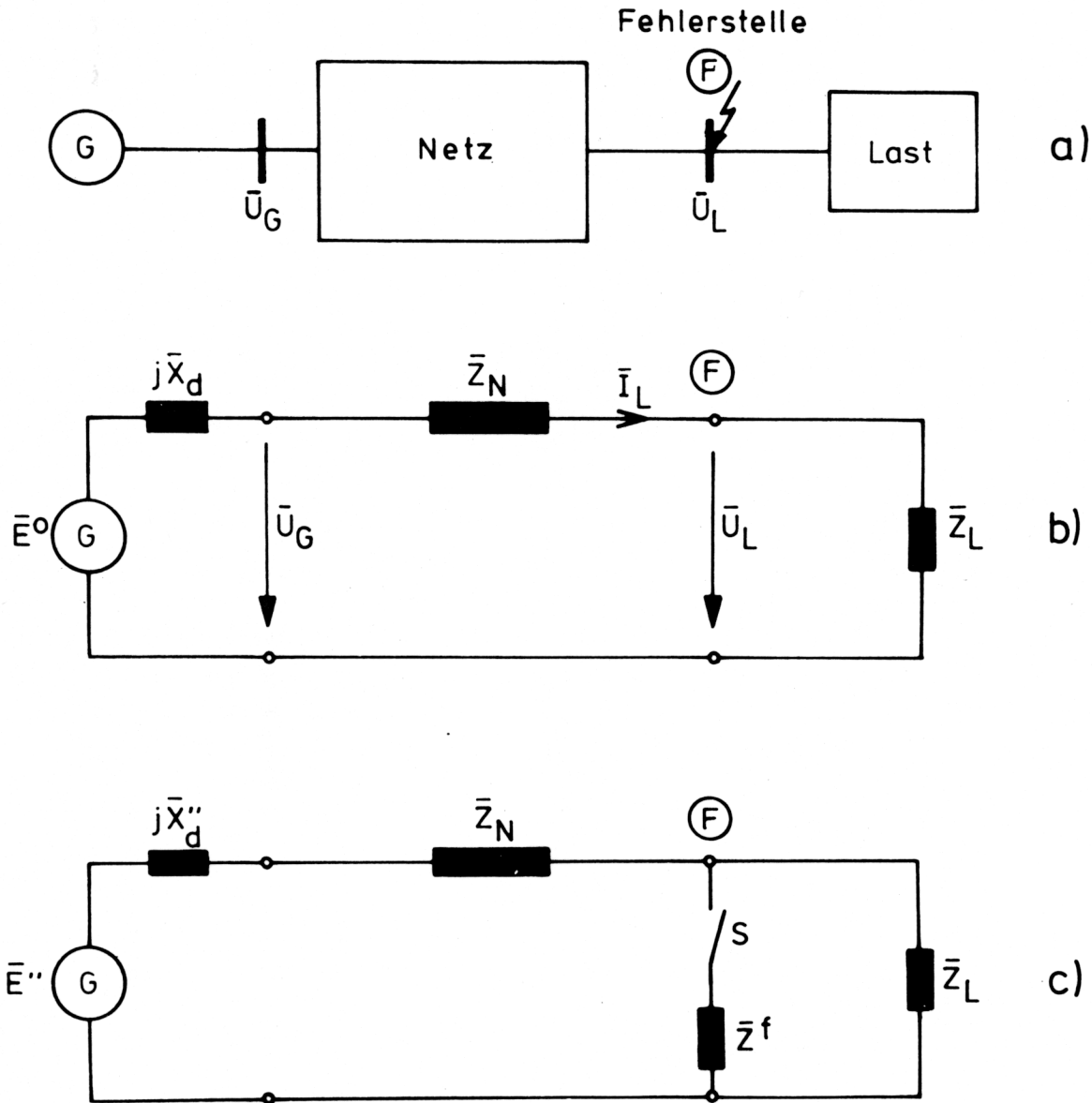


Bild 7.2-2 Kurzschluß-Strom-Berechnung

- a) Anlagenbild
- b) Ersatzschaltbild vor Fehler
- c) Ersatzschaltbild für Kurzschluß, sobald Schalter S geschlossen ist

Der stationäre Betrieb vor Auftreten des Fehlers an der Fehlerstelle F wird durch den Laststrom $\bar{I}_L$ und die Spannung $\bar{U}_L$ gekennzeichnet (s. Bild 7.2-2b). Das zwischen dem Generator und der Last befindliche Übertragungsnetz wird durch die Impedanz $\bar{Z}_N$ beschrieben. Die Last wird durch die Impedanz $\bar{Z}_L$ dargestellt.

Die Ersatzschaltung für die Berechnung des Anfangs-Kurzschlußwechselstromes zeigt Bild 7.2-2c. Der dreipolige Kurzschluß wird durch Schließen des Schalters S dargestellt. Die Fehlerimpedanz $\bar{Z}^f$ modelliert den Lichtbogenwiderstand. Die Polradspannung $\bar{E}_G''$ errechnet sich aus dem Laststrom $\bar{I}_L$ vor Auftritt des Fehlers sowie der subtransienten Generatorreaktanz X_d'' und der Generatorklemmenspannung $\bar{U}_G$ gemäß

$$\bar{E}_G'' = \bar{U}_G + jX_d'' \bar{I}_L . \quad (7.2-5)$$

Dabei wird deutlich, daß der Wert von $\bar{E}_G''$ durch den Laststrom vor Auftreten des Fehlers bestimmt ist. Insofern spielt die Vorbelastung für die Berechnung des Kurzschlußstromes eine wichtige Rolle. Im Gegensatz dazu beschreibt die stationäre Polradspannung $\bar{E}_G^0$ jeden beliebigen, stationären, ungestörten Betriebszustand unabhängig von der Größe des Laststromes $\bar{I}_L$.

Ist die Berechnung des Kurzschlußstromes im transienten Zeitbereich von Interesse, so ist in Bild 7.2-2 anstelle der subtransienten Polradspannung E_g'' mit der transienten Polradspannung $\bar{E}_G'$ zu arbeiten; sie ist durch die Beziehung

$$\bar{E}_G' = \bar{U}_G + jX_d' \bar{I}_L \quad (7.2-6)$$

vorgegeben.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit demjenigen von Abschnitt 7.2-1, so stellt man fest, daß für die Berechnung des Kurzschlußstromes im allgemeinen Betriebszustand die Parameter des Generatorersatzschaltbildes vom Lastzustand abhängig sind.

7.2.3 Synchronmotoren

Synchronmotoren haben ähnliche Reaktanzen wie Generatoren (siehe Tabelle 7.2-1). Im Kurzschlußfall nimmt der Synchronmotor keine Leistung mehr auf; die rotierende Energie und die elektromagnetische Feldenergie bewirken eine Leistungseinspeisung vom Motor in das Netz. Die entsprechenden Beziehungen für die Ersatzschaltungen von Synchronmotoren lauten für den Anfangs-Kurzschlußstrom

$$\bar{E}_M'' = \bar{U}_M - jX_d'' \bar{I}_L \quad (7.2-7)$$

resp. für den transienten Zeitbereich

$$\bar{E}_M' = \bar{U}_M - jX_d' \bar{I}_L . \quad (7.2-8)$$

Dabei ist $\bar{U}_M$ die Klemmenspannung und $\bar{I}_L$ der Laststrom vor Auftreten des Fehlers. X_d'' und X_d' sind die wirksamen Motorreaktanzen im Fehlerfall für den jeweiligen Zeitbereich. $\bar{E}_M''$ beschreibt die Ersatzspannungsquelle für den subtransienten Fehlerstrom, $\bar{E}_M'$ diejenige für den transienten Fehlerstrom.

7.3 Satz von THEVENIN

Durch die Anwendung des Satzes von THEVENIN ist es möglich, im Kurzschlußfall eine äquivalente Netzdarstellung zu finden, die für die Berechnung des Fehlerstromes $\bar{I}_k''$ gut geeignet ist. Die Spannungs- und Stromänderungen in einem Netzwerk, die durch Einfügen einer Impedanz (hier der Fehlerimpedanz $\bar{Z}^f$) zwischen zwei Netzknoten hervorgerufen wird, sind mit den Änderungen identisch, die durch eine mit der Impedanz in Reihe geschalteten Ersatzspannungsquelle hervorgerufen werden, wenn die Ersatzspannungsquelle dem Betrage und Vorzeichen nach dem Spannungswert entspricht, der vor dem Einfügen der Fehlerimpedanz $\bar{Z}^f$ zwischen den beiden Netzknoten

bestanden hat. Gleichzeitig müssen alle übrigen aktiven Spannungsquellen im Netz inaktiv gemacht werden.

Wendet man dieses Netzwerktheorem auf das in Bild 7.2-2 gezeigte Netz an, so stellt man fest, daß die einzufügende Ersatzspannungsquelle den Betrag $\bar{U}_L$ haben muß. Die äquivalente Netzimpedanz $\bar{Z}_a$, die von der Fehlerstelle F aus im Fehlerfall gesehen wird, beträgt

$$\bar{Z}_a = \frac{(\bar{Z}_N + jX'_d)\bar{Z}_L}{\bar{Z}_N + jX'_d + \bar{Z}_L} . \quad (7.3-1)$$

Die äquivalente Impedanz $\bar{Z}_a$ errechnet sich somit aus der Parallelschaltung von $\bar{Z}_L$ und $(\bar{Z}_N + jX'_d)$.

Bild 7.3-1 zeigt das mit dem Satz von THEVENIN berechnete Ersatzschaltbild für die Bestimmung des Anfangs-Kurzschlußstromes $\bar{I}'_k$.

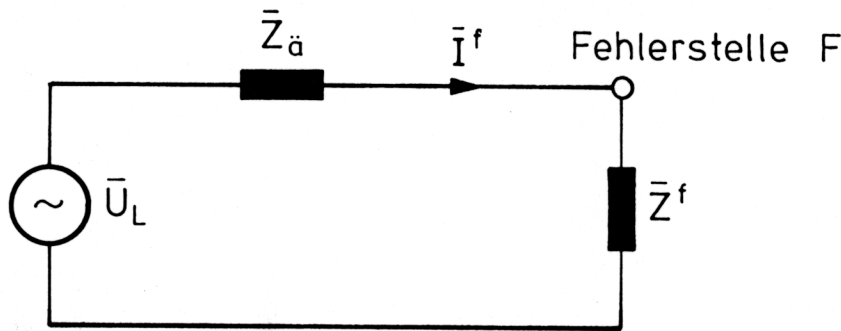


Bild 7.3-1 Äquivalentes Netz für die Kurzschlußstromberechnung gemäß Bild 7.2-2

Damit kann der Anfangskurzschlußstrom $\bar{I}^f$ an der Fehlerstelle F berechnet werden

$$\bar{I}^f = \frac{\bar{U}_L}{\bar{Z}_a + \bar{Z}^f} . \quad (7.3-2)$$

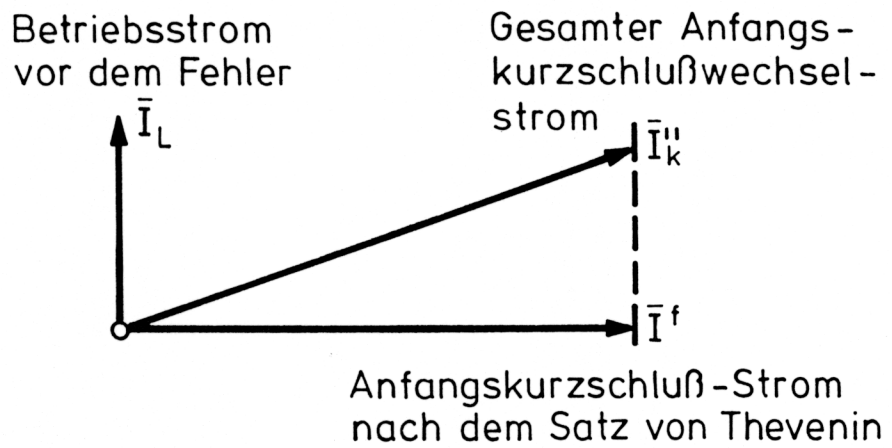
Es ist zu beachten, daß für die Bestimmung des subtransienten Kurzschlußstromes $\bar{I}''_k$ der Wert $\bar{I}^f$, der mit dem Satz von THEVENIN berechnet worden ist, um den stationären Betriebsstrom vor Auftreten des Kurzschlusses vergrößert werden muß.

Wenn der transiente Fehlerstrom $\bar{I}^f$ berechnet werden muß, dann ist in Gl. (7.3-1) nicht mit der subtransienten Maschinenreaktanz, sondern mit der transienten Reaktanz X'_d zu arbeiten.

Wie bereits erwähnt, muß der gesamte Kurzschlußstrom als Überlagerung des stationären Betriebsstromes sowie des Fehlerstromes $\bar{I}^f$ nach dem Satz von THEVENIN bestimmt werden

$$\bar{I}'_k = \bar{I}^f + \bar{I}_L \quad \text{resp.} \quad \bar{I}_k = \bar{I}^f + \bar{I}_L . \quad (7.3-3)$$

Der Betriebsstrom $\bar{I}_L$ ist normalerweise im wesentlichen ein Wirkstrom, während der Fehlerstrom $\bar{I}^f$ ein betragsmäßig viel größerer Blindstrom ist. Entsprechend Bild 7.3-2 ergibt deshalb die Anwendung des Überlagerungssatzes nur eine geringere Vergrößerung des Fehlerstromes. Für viele praktische Anwendungen rechnet man nur mit dem Fehlerstrom $\bar{I}^f$.

Bild 7.3-2 Anwendung des Überlagerungssatzes zur Bestimmung des gesamten Kurzschlußstromes $\bar{I}_k''$

Aus diesen Überlegungen geht deutlich hervor, daß für die Anwendung des Satzes von THEVENIN die Spannung $\bar{U}_L$ am Fehlerort vor Auftreten des Kurzschlusses berechnet werden muß. Für die praktische Durchführung der Fehlerstromberechnung wird aus Gründen der Vereinfachung U_L durch die um einen Faktor $\alpha > 1$ vergrößerte Nennspannung U_N am Fehlerort ersetzt. Nach VDE 0102 gilt $\alpha = 1,1$.

7.4 Kurzschluß-Leistung

Um die Auswirkung eines dreipoligen Kurzschlusses auf ein Netz numerisch bestimmen zu können, benutzt man oft den Begriff der Kurzschluß-Leistung. Damit erhält man ein Maß a) für den Spannungseinbruch im Netz und b) für die Beanspruchung von Schaltern und anderen Netzelementen im Kurzschlußfall.

Die bezogene Anfangs-Kurzschluß-Leistung eines Netzknotens ist definiert als

$$S_k'' = U_L I_k'' \quad (7.4-1)$$

Dabei ist U_L der bezogene Spannungsbetrag an der Fehlerstelle F vor Auftreten des Kurzschlusses und I_k'' der bezogene Betrag des Anfangs-Kurzschlußstromes.

Die transiente Kurzschluß-Leistung ist entsprechend als

$$S_k' = U_L I_k' \quad (7.4-2)$$

definiert.

Die Kurzschluß-Leistung kann sowohl entsprechend Abschnitt 7.2 mit Hilfe der Ersatzschaltungen für die Synchronmaschinen wie auch mit dem Satz von THEVENIN nach Abschnitt 7.3 bestimmt werden.

Da die äquivalente Netzimpedanz $\bar{Z}_a$ im wesentlichen induktiv ist, ist die Kurzschluß-Leistung vorwiegend eine induktive Blindleistung. Sie ist wie der Kurzschlußstrom wegen der zeitabhängigen Maschinenreaktanzen im allgemeinen Fall nicht konstant. Die Annahme eines starren Netzes, in dem sich die Spannung im Kurzschlußfall nicht ändert, bedeutet, daß die Kurzschluß-Leistung unendlich groß ist. Die zulässige maximale Kurzschluß-Leistung ist für jede Spannungsebene durch die Schaltertechnologie vorgegeben. Im 380 kV Netz beträgt sie rund 50 GVA.

7.5 Digitale Kurzschluß-Strom-Berechnung

7.5.1 Problemstellung

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Berechnung der symmetrischen Kurzschlußströme nur in einfachen Fällen mit den in den Abschnitten 7.2 und 7.3 behandelten Verfahren durchgeführt werden kann. Für größere Netze ist die Entwicklung eines digitalen Rechenprogramms unbedingt erforderlich, um rasch und genau die Fehlerströme und Kurzschluß-Leistungen an beliebigen Fehlerstellen im Netz berechnen zu können.

Um die folgenden Überlegungen möglichst übersichtlich zu gestalten, werden die mathematischen Zusammenhänge zur Berechnung eines dreipoligen Kurzschlusses zunächst an Hand des in Bild 7.5-1 gezeigten dreiknotigen Netzes erläutert. Dabei entspricht die Einspeisung in Knoten 1 einem Kraftwerk, während durch G2 in Knoten 2 die Einspeisung aus einem Nachbarnetz dargestellt werden soll.

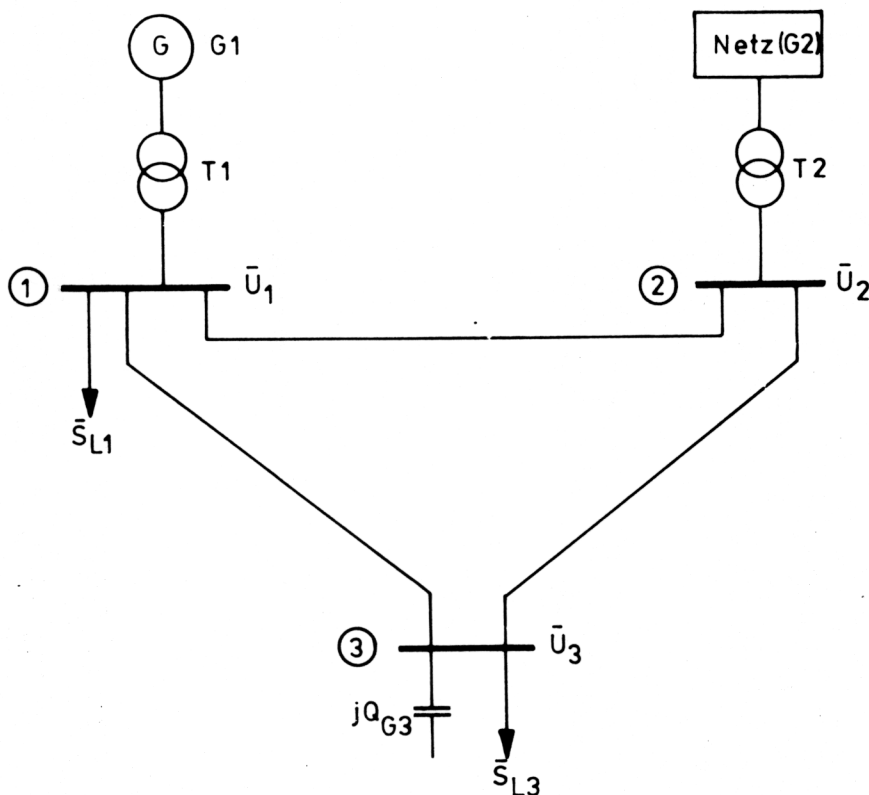


Bild 7.5-1 Dreiknotiges Testnetz für die Kurzschlußberechnung in Knoten 3

Aufbauend auf den für dieses Beispielnetz gewonnenen Ergebnissen wird das Verfahren zur Kurzschlußstrom-Berechnung danach verallgemeinert.

Der Netzzustand im stationären, ungestörten Betriebszustand ist durch die Lösung der Lastflußgleichungen, wie sie in den Kapiteln 2 und 3 behandelt worden sind, gegeben. Nun soll in Knoten 3 ein symmetrischer, dreipoliger Kurzschluß auftreten. Um das Ausschaltverhalten des Leistungsschalters und die Einstellung der Schutzeinrichtung richtig zu spezifizieren, sollen für den transienten Zeitbereich, d.h. drei bis vier Perioden nach Auftreten des Fehlers folgende Größen bestimmt werden:

- Transienter Kurzschlußstrom I'_k an der Fehlerstelle in Knoten 3
- Transiente Kurzschluß-Leistung S'_k

- Kurzschlußströme auf den zum Kurzschlußort führenden Leitungen
- Die Spannungsbeträge in den Knoten 1 und 2.

7.5.2 Netzmodell für symmetrische Fehlerstromberechnungen

Die einphasige Netzdarstellung des zu untersuchenden 110 kV Testnetzes ist in Bild 7.5-2 dargestellt. Die drei Übertragungsleitungen sind je 50 km lang mit der Längsimpedanz $\bar{Z}_u = j 0,1$ in der bezogenen Darstellung. Die Basisleistung ist 50 MVA und die Basisspannung 110 kV. Die Querglieder werden vernachlässigt.

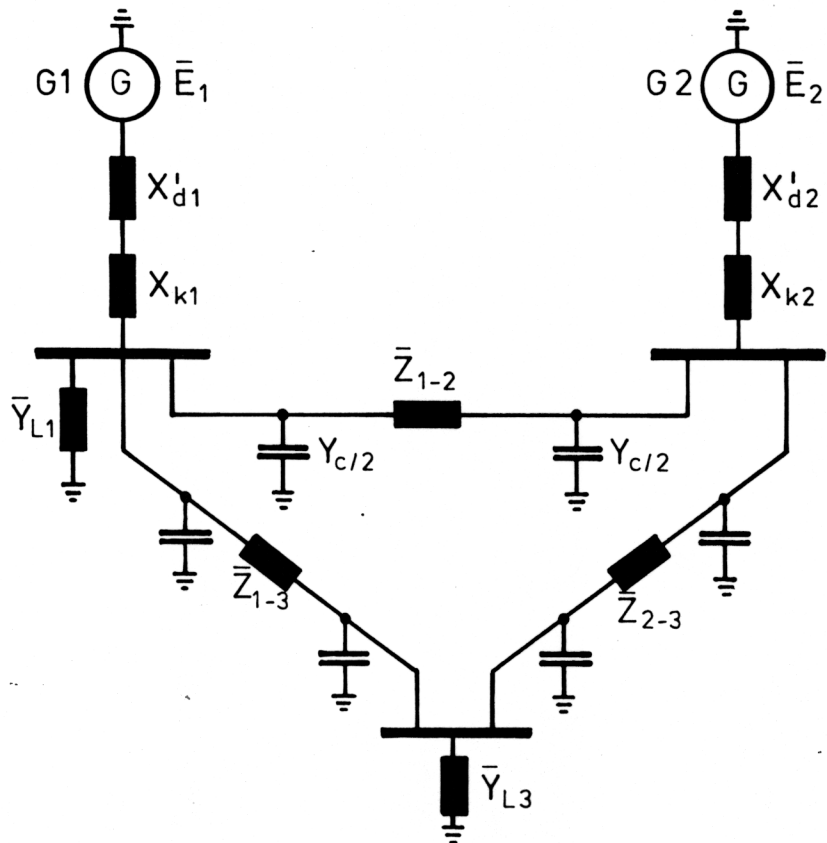


Bild 7.5-2 Ersatzschaltung für das dreiknotige Testnetz

Jede Netzeinspeisung wird entsprechend Abschnitt 7.2 durch eine Spannungsquelle hinter einer Reaktanz dargestellt. Dazu benutzt man für die Generatordarstellung die transiente Reaktanz X'_d , während für die Netzeinspeisung die Netzimpedanz $\bar{Z}_N$ verwendet werden muß. Die Transformatoren werden durch die als bekannt vorausgesetzten Kurzschluß-Impedanzen modelliert. Es gelten folgende Werte in der bezogenen Darstellung

Element	Nennleistung	Reaktanz
Generator 1	2,0	transiente Reaktanz $X'_d = 0,1$
Transformator 1	2,0	Kurzschlußreaktanz $X_k = 0,05$
Netzeinspeisung	4,0	Netzreaktanz $X'_d = 0,05$
Transformator 2	4,0	Kurzschlußreaktanz $X_k = 0,025$

Die Lasten in Knoten 1 und 3 werden durch folgende bezogenen Größen vorgegeben

$$\bar{S}_{L1} = 1,0 + j 0,5 \quad \text{und} \quad \bar{S}_{L2} = 0,5 + j 0,0 .$$

Nimmt man an, daß die Spannungsbeträge in diesen beiden Knoten gleich 1,0 (d. h. gleich Nennspannung) sind, so kann man die Lasten einfach durch folgende Lastadmittanzen darstellen. Mit der Beziehung

$$\bar{S} = P + j Q = \bar{U} \bar{I}^* = \bar{Y}^* U^2 \quad (7.5-1)$$

erhält man unmittelbar für die oben spezifizierten Lasten $\bar{Y}_{L1} = 1 - j 0,5$ und $Y_{L3} = 0,5$.

Für die weiteren Überlegungen wird mit diesen Admittanzen gearbeitet; d. h. man nimmt an, daß sie spannungsunabhängig sind. Bild 7.5-2 zeigt die einphasige Ersatzschaltung als Ausgangspunkt für die Fehlerstromberechnung.

Zusammenfassend gelten in Bild 7.5-2 folgende numerischen Werte:

Generator 1:	Transiente Reaktanz $X'_{d1} = 0,1$
Transformator 1:	Kurzschlußreaktanz $X_{k1} = 0,05$
Generator 2:	Transiente Reaktanz $X'_{d2} = 0,05$
Transformator 2:	Kurzschlußreaktanz $X_{k2} = 0,025$
Leitungsreaktanzen:	$\bar{Z}_{1-2} = \bar{Z}_{1-3} = \bar{Z}_{2-3} = j 0,1$
Admittanzen der Leitungskapazitäten:	$\bar{Y}_c/2 = j 0,02$
Lastadmittanzen:	$\bar{Y}_{L1} = 1 - j 0,5 \quad Y_{L3} = 0,5$

7.5.3 Berechnung des stationären Netzzustandes

Nach den Spezifikationen der Lasten und der Einspeisung in Knoten 2 kann nun mit den in Kapitel 3 und 4 behandelten Methoden eine Lastflußberechnung durchgeführt werden, um so alle Knotenspannungen und Leitungsströme vor Auftreten des Fehlers berechnen zu können. Das Ergebnis dieser Berechnung ist das vollständige Spannungsprofil, das durch den folgenden Spannungsvektor U_k^0 gegeben ist

$$U_k^0 = \begin{bmatrix} \bar{U}_1^0 \\ \bar{U}_2^0 \\ \bar{U}_3^0 \end{bmatrix} . \quad (7.5-2)$$

In vielen praktischen Fällen wird man auf diese exakte Bestimmung des Spannungsprofils verzichten und folgende beiden wichtigen Vereinfachungen verwenden:

- alle Knotenspannungen werden gleich der Nennspannung oder gleich der um den Faktor α vergrößerten Nennspannung gesetzt (d. h. gleich 1,0 in der bezogenen Darstellung)
- alle Betriebsströme vor dem Auftreten des Fehlers werden zu Null angenommen, da sie im Vergleich zum Fehlerstrom viel kleiner sind.

Die zweite Voraussetzung impliziert die Annahme, daß in Bild 7.5-2 nicht nur die Queradmittanzen der Leitungen, sondern auch die Lastadmittanzen vernachlässigt werden.

Die Änderungen der Ströme, die durch den Kurzschluß hervorgerufen werden, werden im wesentlichen durch die induktiven Längsimpedanzen der Leitungen bestimmt. Bei Impedanzwerten in der Größenordnung von 0,1 erhält man Ströme in der Größenordnung von 10. Während die Ströme vor dem Kurzschluß vorwiegend Wirkströme sind, sind sie nach dem Auftreten des Kurzschlusses vorwiegend induktive Blindströme. Den gesamten Fehlerstrom I'_k nach dem Kurzschluß erhält man als vektorielle Summe zweier um 90° gegeneinander phasengedrehter Ströme entsprechend Bild 7.3-2. Dabei zeigt sich, daß der Gesamtstrom I'_k nach Auftreten des Fehlers ungefähr gleich der größten Komponente der vektoriellen Summe ist; d.h. mit anderen Worten, daß der Betriebsstrom vor Auftreten des Fehlers vernachlässigt werden kann. Bild 7.5-3 zeigt das aufgrund dieser Überlegungen vereinfachte Netz, das für die weiteren Kurzschlußberechnungen verwendet wird. Somit kann im folgenden die Approximation $I'_k \approx I^f$ benutzt werden.

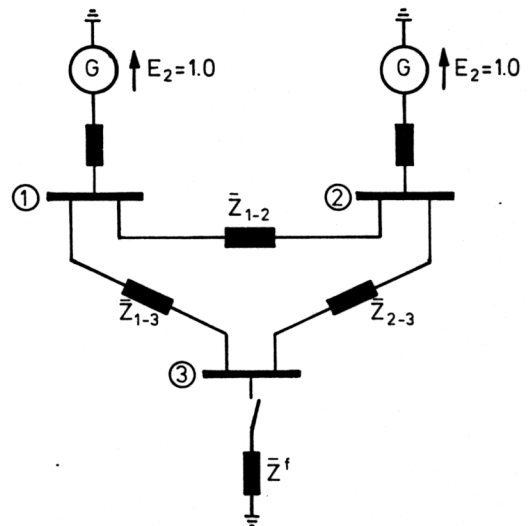


Bild 7.5-3 Vereinfachtes Netzmodell für die Kurzschlußberechnung ohne Vorbelastung

7.5.4 Anwendung des THEVENIN-Theorems

Nun werden die im Netz auftretenden Strom- und Spannungsänderungen berechnet, die durch den dreipoligen Kurzschluß in Knoten 3 hervorgerufen werden. Sie können mit dem Satz von THEVENIN dadurch berechnet werden, daß in Knoten 3 eine Spannungsquelle $U_3^0 = 1,0$ in Reihe mit der Fehlerimpedanz $\bar{Z}^f$ zur Nachbildung des Lichtbogenwiderstandes eingefügt wird. Entsprechend Bild 7.5-4 wird jedoch im folgenden mit einem satten Kurzschluß, d.h. $Z^f = 0$, gearbeitet. Alle übrigen Spannungsquellen sind inaktiv zu machen.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, den Fehlerstromvektor I_k^f einzuführen. Seine Dimension ist durch die Anzahl der Netzknoten vorgegeben. Entsprechend der Annahme, daß der Fehler in Knoten 3 auftritt, lautet der Fehlerstromvektor für den vorliegenden Fall

$$I_k^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{I}_3^f \end{bmatrix}. \quad (7.5-3)$$

Demnach besteht der Vektor I_k^f aus Nullelementen; lediglich im Fehlerknoten ist der zunächst noch unbekannte Fehlerstrom $\bar{I}_3^f$ mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Der Wert von $\bar{I}_3^f$ wird in Abschnitt 7.5.5 berechnet.

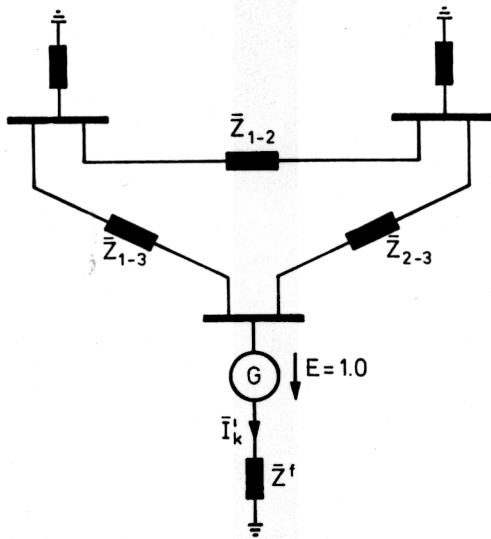


Bild 7.5-4 Berechnung der Strom- und Spannungsänderungen mit dem Satz von THEVENIN

Die von der Ersatzspannungsquelle verursachten Knotenspannungen werden als THEVENIN-Spannungen $\bar{U}_i^T$ bezeichnet und im Vektor U_k^T zusammengefaßt

$$U_k^T = \begin{bmatrix} \bar{U}_1^T \\ \bar{U}_2^T \\ \bar{U}_3^T \end{bmatrix} = Z_k I_k^f . \quad (7.5-4)$$

Entsprechend Gl. (7.5-4) lassen sich die THEVENIN-Spannungen U_k^T aus dem Stromvektor I_k^f und der Knotenimpedanzmatrix Z_k berechnen. Diese läßt sich durch Matrizeninversion aus der Knotenadmittanzmatrix Y_k bestimmen

$$Z_k = Y_k^{-1} . \quad (7.5-5)$$

Es ist der Vollständigkeit halber darauf hinzuweisen, daß es leistungsfähige, numerische Verfahren gibt, um die Knotenimpedanzmatrix Z_k direkt ohne Matrizeninversion aufzustellen.

7.5.5 Überlagerungssatz

Für die Bestimmung der gesamten Kurzschlußgrößen müssen die Ergebnisse von Abschnitt 7.5.4 und 7.5.3 addiert werden. Allgemein gilt für die Knotenspannungen im Fehlerfall

$$U_k^f = U_k^0 + Z_k I_k^f = U_k^0 + U_k^T . \quad (7.5-6)$$

Dabei ist U_k^0 der Vektor aller Knotenspannungen im ungestörten Zustand und U_k^T der THEVENIN-Spannungsvektor gemäß Gl. (7.5-4).

Mit Gl. (7.5-6) kann nun der bisher unbekannte Fehlerstrom $\bar{I}_3^f$ berechnet werden, da zusätzlich zu den Spannungsgleichungen (7.5-6) noch folgende Beziehung gilt

$$\bar{U}_3^f = \bar{Z}^f \bar{I}_3^f . \quad (7.5-7)$$

Da ein satter Kurzschluß angenommen worden ist, gilt $U_3^f = 0$ und $Z^f = 0$. Damit hat man noch eine zusätzliche Bestimmungsgleichung, um die beiden Fehlerspannungen U_1^f und U_2^f sowie den Fehlerstrom I_3^f berechnen zu können. Durch den Übergang zur Komponentenschreibweise erhält man

$$\begin{aligned}\bar{U}_1^f &= \bar{U}_1^0 - \bar{z}_{13} \bar{I}_3^f \\ \bar{U}_2^f &= \bar{U}_2^0 - \bar{z}_{23} \bar{I}_3^f \\ \bar{U}_3^f &= 0 = \bar{U}_3^0 - \bar{z}_{33} \bar{I}_3^f .\end{aligned}\tag{7.5-8}$$

Dabei bezeichnet $\bar{z}_{ij}$ das (i, j) -te Element der Knotenimpedanzmatrix Z_k . Daraus folgt unmittelbar für den Fehlerstrom $\bar{I}_3^f$

$$\bar{I}_3^f = \bar{U}_3^0 / \bar{z}_{33}\tag{7.5-9}$$

sowie die Spannung in Knoten 1 und 2

$$\begin{aligned}\bar{U}_1^f &= \bar{U}_1^0 - \frac{\bar{z}_{13}}{\bar{z}_{33}} \bar{U}_3^0 \\ \bar{U}_2^f &= \bar{U}_2^0 - \frac{\bar{z}_{23}}{\bar{z}_{33}} \bar{U}_3^0 .\end{aligned}\tag{7.5-10}$$

Nun lassen sich die Fehlerströme auf den Leitungen mit den Fehlerspannungen und den Leitungslängsimpedanzen $\bar{Z}_{ij}$ berechnen. Allgemein gilt

$$\bar{I}_{ij} = \frac{\bar{U}_i - \bar{U}_j}{\bar{Z}_{ij}} .\tag{7.5-11}$$

Um das Beispielnetz dieses Abschnittes nun doch numerisch durchrechnen zu können, muß zunächst die Knotenimpedanzmatrix Z_k bestimmt werden. Für die Knotenadmittanzmatrix Y_k gilt zunächst mit den in Bild 7.5-3 gemachten Vereinfachungen

$$Y_k = j \begin{bmatrix} -26.7 & 10 & 10 \\ 10 & -33.3 & 10 \\ 10 & 10 & -20 \end{bmatrix} .$$

Die direkte Matrizeninversion ergibt für die Knotenimpedanzmatrix Z_k

$$Z_k = Y_k^{-1} = j \begin{bmatrix} 0,073 & 0,039 & 0,056 \\ 0,039 & 0,056 & 0,047 \\ 0,056 & 0,047 & 0,101 \end{bmatrix} .$$

Für den satten Kurzschluß in Knoten 3 erhält man mit Gl. (7.5-9) für den Fehlerstrom

$$I_3^f = \frac{1}{j 0,101} = -j 9,90$$

$$\bar{I}_i^f = \frac{\bar{U}_i^0}{\bar{Z}^f + \bar{z}_{ii}} . \quad (7.5-16)$$

Die Knotenspannungen $\bar{U}_j$ lauten nun

$$\bar{U}_j^f = \bar{U}_j^0 - \frac{\bar{z}_{ji}}{\bar{Z}^f + \bar{z}_{ii}} \bar{U}_i^0 . \quad (7.5-17)$$

Die Kurzschlußströme auf den Leitungen sind durch Gl. (7.5-11) bereits angegeben worden.

7.5.7 Digitales Rechenprogramm

Bild 7.5-5 zeigt das Flußdiagramm für die hier behandelte symmetrische Kurzschlußstrom-Berechnung. Es ist zu beachten, daß beim Aufstellen der Knotenadmittanzmatrix Y_k die Kurzschlußreaktanzen der Transformatoren, die Maschinenreaktanzen der Generatoren sowie die äquivalenten Impedanzen der Netzeinspeisungen und der Lasten zu berücksichtigen sind. Anstelle der Berechnung der Knotenimpedanzmatrix Z_k als Inverse der Knotenadmittanzmatrix Y_k gibt es direkte, leistungsfähige Verfahren. Für deren Beschreibung wird auf die Spezialliteratur verwiesen.

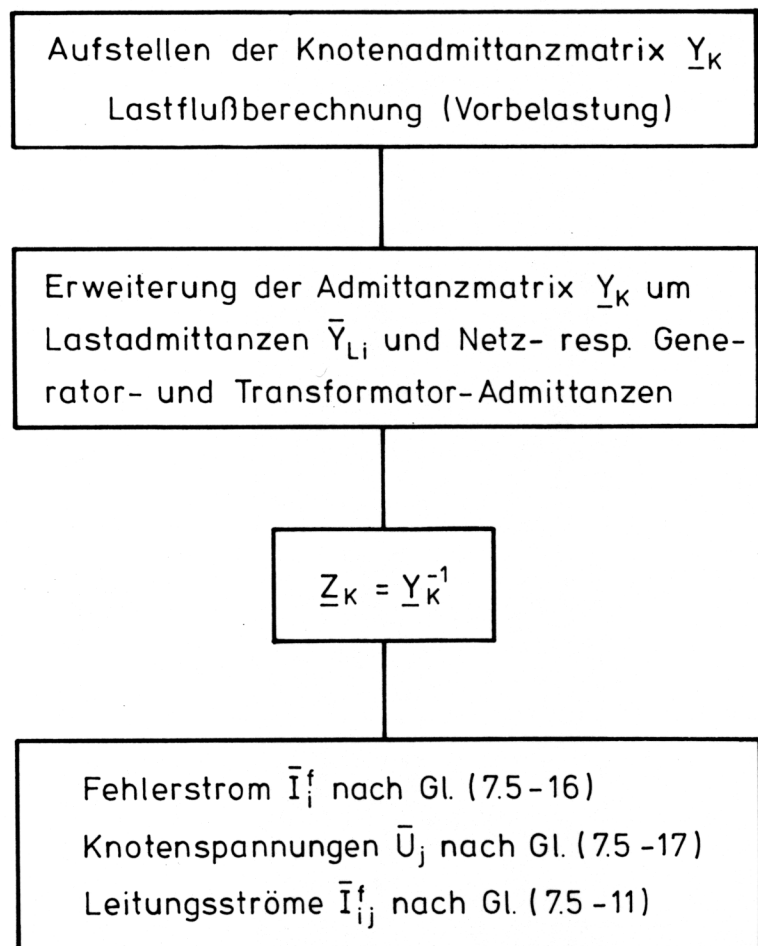


Bild 7.5-5 Flußdiagramm für die symmetrische Kurzschluß-Strom-Berechnung

Aufgaben

Aufgabe 7.1

Zwei Generatoren sind über einen Dy5-Transformator (d. h. Dreieck-Stern-Transformator mit einer Phasendrehung von 150° zwischen Primär- und Sekundärspannung) entsprechend Bild Ü 7.1-1 mit einem Versorgungsnetz verbunden. Die Primärspannung beträgt 21 kV, die Sekundärspannung 110 kV. Die Nenndaten der beiden Generatoren lauten

	Generator 1	Generator 2
Nennleistung S_N	50 MVA	25 MVA
Klemmenspannung U	21 kV	21 kV

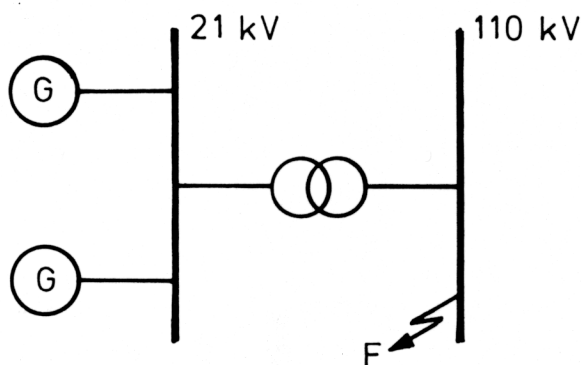


Bild Ü 7.1-1 Kraftwerkeinspeisung mit zwei Generatoren in ein 110 kV Netz bei einem Sammelschienenkurzschluß an der Fehlerstelle F

Die auf die jeweilige Nennleistung bezogene subtransiente Generatorreaktanz X_d'' beträgt $X_d'' = 0,25$. Die Kurzschlußreaktanz des Transformators ist $\bar{Z}_k = j 0,1$, bezogen auf die Nennleistung des Transformators $S_N = 75$ MVA.

Vor Auftreten des Fehlers beträgt die sekundäre Klemmenspannung des Transformators 100 kV. Der Transformator wird im Leerlauf betrieben. Zwischen den Maschinen fließt kein Ausgleichsstrom.

Gesucht ist der subtransiente Kurzschlußstrom, wenn auf der Hochspannungsseite des Transformators (Fehlerstelle F in Bild Ü 7.1-1) ein dreipoliger Kurzschluß auftritt.

Aufgabe 7.2

Ein Synchrongenerator mit einer Nennleistung von $S_G = 30$ MVA versorgt über eine Leitung mit der bezogenen Längsreaktanz $X_L = 0,1$ eine Last, die aus einem Synchronmotor besteht, dessen Nennleistung ebenfalls $S_M = 30$ MVA beträgt. Die Nennübertragungsspannung beträgt 10 kV. Beide Synchronmaschinen haben die subtransiente Reaktanz $X_d'' = 0,2$ bezogen auf die Nennleistung.

Die Lastaufnahme des Motors beträgt 20 MW bei einem Leistungsfaktor $\cos \phi = 0,8$. Vor Auftreten eines dreipoligen Kurzschlusses an den Motorklemmen beträgt die Klemmenspannung $U_M = 9,1$ kV.

Mit Hilfe der Ersatzschaltungen für Synchronmaschinen sind die Kurzschlußströme des Generators und des Motors sowie der Gesamtkurzschlußstrom an der Fehlerstelle F zu berechnen. Als Basisleistung ist $S_B = 30$ MVA, als Basisspannung $U_B = 10$ kV zu verwenden.

Aufgabe 7.3

Mit Hilfe des Satzes von THEVENIN ist der Anfangskurzschlußstrom I_k'' bei einem Fehler in Knoten 3 des in Bild 7.5-2 gezeigten Netzes zu berechnen. Dabei sind die Querglieder der Leitungen sowie die Lastadmittanzen zu vernachlässigen. Für die Knotenspannungen wird einheitlich die bezogene Spannung $U_i = 1,0$ für $i = 1, 2, 3$ angenommen.

Gesucht ist der subtransiente Kurzschlußstrom, wenn auf der Hochspannungsseite des Transformators (Fehlerstelle F in Bild Ü 7.1-1) ein dreipoliger Kurzschluß auftritt.

Aufgabe 7.2

Ein Synchrongenerator mit einer Nennleistung von $S_G = 30$ MVA versorgt über eine Leitung mit der bezogenen Längsreaktanz $X_L = 0,1$ eine Last, die aus einem Synchronmotor besteht, dessen Nennleistung ebenfalls $S_M = 30$ MVA beträgt. Die Nennübertragungsspannung beträgt 10 kV. Beide Synchronmaschinen haben die subtransiente Reaktanz $X_d'' = 0,2$ bezogen auf die Nennleistung.

Die Lastaufnahme des Motors beträgt 20 MW bei einem Leistungsfaktor $\cos \phi = 0,8$. Vor Auftreten eines dreipoligen Kurzschlusses an den Motorklemmen beträgt die Klemmenspannung $U_M = 9,1$ kV.

Mit Hilfe der Ersatzschaltungen für Synchronmaschinen sind die Kurzschlußströme des Generators und des Motors sowie der Gesamtkurzschlußstrom an der Fehlerstelle F zu berechnen. Als Basisleistung ist $S_B = 30$ MVA, als Basisspannung $U_B = 10$ KV zu verwenden.

Aufgabe 7.3

Mit Hilfe des Satzes von THEVENIN ist der Anfangskurzschlußstrom I_k'' bei einem Fehler in Knoten 3 des in Bild 7.5-2 gezeigten Netzes zu berechnen. Dabei sind die Querglieder der Leitungen sowie die Lastadmittanzen zu vernachlässigen. Für die Knotenspannungen wird einheitlich die bezogene Spannung $U_i = 1,0$ für $i = 1, 2, 3$ angenommen.

8 Unsymmetrische Fehlerstrom-Berechnung

8.1 Einleitung

Die im letzten Kapitel eingeführte Berechnung des symmetrischen, dreipoligen Kurzschluß-Stromes wird in diesem Kapitel dahingehend erweitert, daß nun auch unsymmetrische Fehler bestimmt werden können. Zwar liefert der symmetrische Kurzschluß-Fehler stets den größten Fehlerstrom; er spielt jedoch bezüglich seiner Häufigkeit nicht die gleiche Rolle wie einpolige und zweipolige Fehler. Unsymmetrische Fehler lassen sich nicht mehr durch das in Kapitel 7 benutzte, einphasige Wechselstrom-Ersatzschaltbild darstellen. Die Methode der symmetrischen Komponenten für die Berechnung der unsymmetrischen Fehler erweist sich als besonders gut geeignet, eine Computer orientierte Lösung abzuleiten. Die Grundprinzipien dieses Transformationsverfahrens werden im vorliegenden Zusammenhang als bekannt vorausgesetzt, so daß die Überlegungen in Abschnitt 8.2 als Zusammenfassung der wichtigsten Beziehungen unsymmetrischer Fehler in Energieübertragungssystemen anzusehen sind. Sie stellen jedoch keine Einführung in die Methode der symmetrischen Komponenten dar. Für die Behandlung der entsprechenden, mathematischen Grundlagen wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Um die Methode der symmetrischen Transformation auf die Berechnung unsymmetrischer Fehler in Energieübertragungssystemen anwenden zu können, werden in Abschnitt 8.3 einige wichtige Ersatzschaltbilder von Drehstromkomponenten in symmetrischen Komponenten vorgestellt. Damit wird die Möglichkeit geschaffen, einfache Fehlerstrom-Berechnungen mit symmetrischen Komponenten entsprechend Abschnitt 8.4 durchzuführen. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß sie sehr anschaulich ist und einen guten Bezug zwischen physikalischen Vorgängen und mathematischer Beschreibung gibt.

Allerdings ist die genannte Vorgehensweise für eine systematische Rechnerlösung weniger geeignet. Darauf wird in Abschnitt 8.5 eingegangen. Mit Hilfe der symmetrischen Komponenten und der Matrizendarstellung wird die Computer-orientierte Fehlerstrom-Berechnung behandelt. Wie schon in Kapitel 7 erwähnt wird dabei aus Platzgründen nicht auf die effiziente Erstellung der für die Fehlerstrom-Berechnung wichtigen Knotenimpedanzmatrix eingegangen.

Die Kenntnis des in Kapitel 7 behandelten, dreiphasigen, symmetrischen Kurzschluß-Stromes ist für die Dimensionierung der Schaltanlagen und die Einstellung der Schutz-einrichtungen wichtig, da bei dieser Fehlerart der größte, mögliche Fehlerstrom fließt. Bezüglich der Häufigkeit des Auftretens haben jedoch im Vergleich dazu die unsymmetrischen Fehler eine viel größere Bedeutung. Unsymmetrische Fehler entstehen durch Überbrückung oder Durchschlag der Isolation zwischen einem oder mehreren Leitern und Erde bzw. geerdeten Leitern oder geerdeten Anlageteilen. Behandelt werden in diesem Kapitel folgende Fehlerarten

- Einpoliger Erdkurzschluß
- Zweipoliger Kurzschluß mit Erdberührung
- Zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung.

Bild 8.1-1 zeigt diese drei Fehlerarten zusammen mit dem in Kapitel 7 behandelten dreipoligen, symmetrischen Kurzschluß.

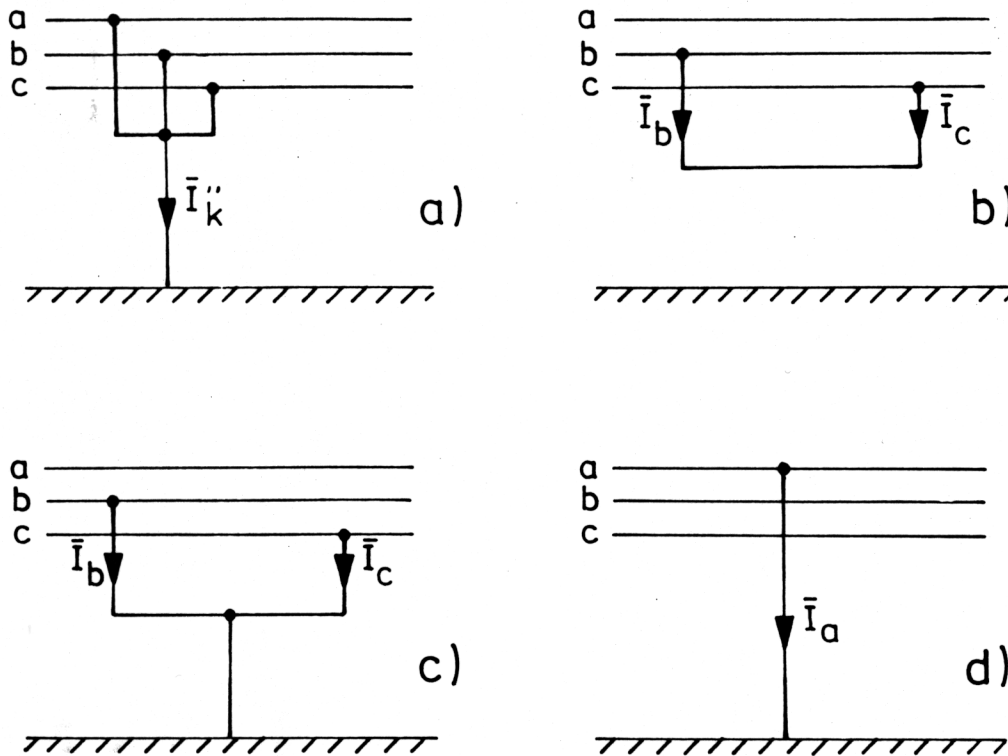


Bild 8.1-1 Fehlerarten und Kurzschluß-Ströme

- a) dreipoliger Kurzschluß (siehe Kapitel 7)
- b) zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung
- c) zweipoliger Kurzschluß mit Erdberührung
- d) einpoliger Erdkurzschluß

Es ist an dieser Stelle noch anzumerken, daß bei der Berechnung der in Bild 8.1-1 dargestellten Fehlermöglichkeiten die Sternpunktbehandlung der das Netz speisenden Transformatoren eine wichtige Rolle spielt. Dabei unterscheidet man folgende vier Möglichkeiten

- isolierter Sternpunkt
- Sternpunkt mit Löschspule
- starr geerdeter Sternpunkt
- niederohmig geerdeter Sternpunkt.

Die beiden erst genannten Möglichkeiten findet man besonders in Mittel- und Niederspannungsnetzen der Energieverteilung. Der einpolige Fehler (Erdschluß) ist dabei mit einem relativ kleinen Strom verbunden. Der Erdschluß im Mittelspannungsnetz schränkt die Versorgungskontinuität im allgemeinen nicht ein. Der Erdschluß-Strom läßt sich in isolierten und gelöschten Netzen aus der Kenntnis der Leiter-Erd-Kapazitäten hinreichend genau berechnen.

In den Hoch- und Höchstspannungsnetzen der Energieübertragung ist der Transformator-Sternpunkt starr geerdet, so daß ein- und zweipolige Fehler mit erheblichen Strömen verbunden sind. Für deren Berechnung müssen unsymmetrische Betriebszustände untersucht werden. Dazu eignet sich die im folgenden Abschnitt beschriebene Methode der symmetrischen Komponenten besonders gut.

8.2 Symmetrische Komponenten

In den bisherigen Überlegungen wurde stets vorausgesetzt, daß sich das Drehstromsystem in einem symmetrischen Betriebszustand befindet. Konsequenz dieser Voraussetzung ist die Tatsache, daß das Drehstromsystem mit einem einphasigen Wechselstrom-Ersatzschaltbild modelliert werden kann. Mit dem Übergang auf unsymmetrische Betriebszustände müssen andere, mathematische Methoden verwendet werden, um ein geeignetes Modell für die Berechnung herleiten zu können. Dabei gibt es zahlreiche Verfahren, die alle das gemeinsame Ziel haben, das unsymmetrische Drehstromsystem in drei symmetrische Systeme zu transformieren. Ein Verfahren, das sich für die unsymmetrische Fehlerstromberechnung besonders gut eignet, ist die Methode der symmetrischen Komponenten.

8.2.1 Transformation mit symmetrischen Komponenten

Physikalisch gesprochen besteht bei einem unsymmetrischen Betriebszustand eine Abhängigkeit zwischen den Phasengrößen. Das Ziel der Transformation mit symmetrischen Komponenten besteht darin, das unsymmetrische System durch drei symmetrische Systeme darzustellen. Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens ist die Eigenschaft, daß sich das zu untersuchende Drehstromsystem durch eine zyklisch-symmetrische Impedanzmatrix der Form

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{C} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} \quad (8.2-1)$$

darstellen läßt. Dabei bilden die Leiter-Erd-Spannungen $\bar{U}_a$, $\bar{U}_b$ und $\bar{U}_c$ den Vektor U_p ; der Index „p“ bedeutet, daß es sich dabei um einen physikalischen Vektor handelt. Die Strangströme $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ und $\bar{I}_c$ bilden den Vektor I_p entsprechend der folgenden Definition

$$U_p = \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} \quad I_p = \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} . \quad (8.2-2)$$

Die Netzwerk-Impedanzmatrix Z_p

$$Z_p = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{C} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{A} \end{bmatrix} \quad (8.2-3)$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen den Leiterströmen und den Leiterspannungen. In einem symmetrischen Betriebszustand sind die komplexen Elemente $\bar{B}$ und $\bar{C}$ gleich Null, so daß zwischen den Leitern a , b und c keine Abhängigkeiten bestehen.

Mit der Transformationsmatrix T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \\ \bar{a} & \bar{a}^2 & 1 \end{bmatrix} , \quad (8.2-4)$$

wobei der komplexe Drehoperator $\bar{a}$ durch

$$\bar{a} = \exp j 120^\circ = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -0,5 + j 0,866 \quad (8.2-5)$$

definiert ist, gilt zwischen den physikalischen Strömen I_p und den transformierten Komponenten Strömen I_s folgende Beziehung

$$I_p = T I_s . \quad (8.2-6)$$

Dabei besteht der Stromvektor I_s aus den drei Komponentenströmen $\bar{I}_+$, $\bar{I}_-$ und $\bar{I}_0$

$$I_s = \begin{bmatrix} \bar{I}_+ \\ \bar{I}_- \\ \bar{I}_0 \end{bmatrix} . \quad (8.2-7)$$

$\bar{I}_+$ bezeichnet den komplexen Strom des Mitsystems; $\bar{I}_-$ denjenigen des Gegensystems und $\bar{I}_0$ denjenigen des Nullsystems. Während das Mit- und Gegensystem zwei Drehstromsystemen entspricht, bildet das Nullsystem ein Wechselstromsystem.

Durch Matrizeninversion können von Gl. (8.2-6) ausgehend die auf symmetrische Komponenten transformierten Ströme des Mit-, Gegen- und Nullsystems berechnet werden

$$I_s = T^{-1} I_p . \quad (8.2-8)$$

Die inverse Transformationsmatrix T^{-1} ist durch folgenden Ausdruck definiert

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (8.2-9)$$

Es bleibt noch zu ergänzen, daß unsymmetrische Spannungen in gleicher Weise wie die Ströme in symmetrische Komponenten transformiert werden

$$U_s = T^{-1} U_p . \quad (8.2-10)$$

Die entsprechende Rücktransformation von symmetrischen Komponenten auf physikalische Spannungswerte ist durch

$$U_p = T U_s \quad (8.2-11)$$

gegeben.

8.2.2 Leistungsberechnung

In einem Drehstromsystem ist der komplexe Leistungsfluß $\bar{S}$ durch die Leiterströme und -spannungen gegeben .

$$\bar{S} = P + j Q = \bar{U}_a \bar{I}_a^* + \bar{U}_b \bar{I}_b^* + \bar{U}_c \bar{I}_c^* = U_p^T I_p^* . \quad (8.2-12)$$

Für die letzte Beziehung ist die Definition (8.2-2) verwendet worden. Nach Anwendung der Transformationsvorschriften (8.2-6) und (8.2-11) erhält man für den Leistungsfluß $\bar{S}$ unter Beachtung der Gl. (1.2-1) die Beziehung

$$\bar{S} = (TU_s)^T (TI_s)^* = U_s^T T^T T^* I_s^* = 3 U_s^T I_s^* . \quad (8.2-13)$$

Somit läßt sich der Leistungsfluß $\bar{S}$ unmittelbar auch mit den auf symmetrische Komponenten transformierten Größen berechnen. Abgesehen vom Faktor 3 handelt es sich somit um eine leistungsinvariante Transformation.

8.2.3 Netzgleichungen

Die Darstellung der Netzgleichungen mit Hilfe der Impedanzmatrix gemäß Gl. (8.2-1) mit physikalischen Größen kann auch auf symmetrische Komponenten transformiert werden. Wiederum erhält man mit Gl. (8.2-6) und (8.2-11) von Gl. (8.2-1) ausgehend

$$U_p = TU_s = Z_p I_p = Z_p T I_s . \quad (8.2-14)$$

Aufgelöst nach dem Spannungsvektor U_s erhält man

$$U_s = T^{-1} Z_p T I_s = Z_s I_s . \quad (8.2-15)$$

Somit lautet die Impedanzmatrix Z_s ausgedrückt in symmetrischen Komponenten

$$Z_s = T^{-1} Z_p T . \quad (8.2-16)$$

Für die entsprechende Darstellung mit der Netzausmittanzmatrix Y_p definiert als

$$I_p = Y_p U_p \quad (8.2-17)$$

erhält man für die Transformationsvorschrift

$$Y_s = T^{-1} Y_p T . \quad (8.2-18)$$

Die beiden Matrizen Z_s und Y_s sind Diagonalmatrizen, solange die Netzimpedanzmatrix Z_p eine zyklisch-symmetrische Matrix ist. Deshalb kann das Mit-, Gegen- und Nullsystem jeweils getrennt behandelt werden. Man spricht auch von der Entkopplung des Mit-, Gegen- und Nullsystems.

8.3 Ersatzschaltbilder in symmetrischen Komponenten

8.3.1 Übertragungselemente

Bild 8.3-1 zeigt in vereinfachter Form die dreiphasige Darstellung einer Drehstromübertragung (Freileitung oder Kabel), wobei die Querglieder im Ersatzschaltbild weggelassen worden sind. Gegenüber dem in Kapitel 2 vorgestellten einphasigen Ersatzschalt-

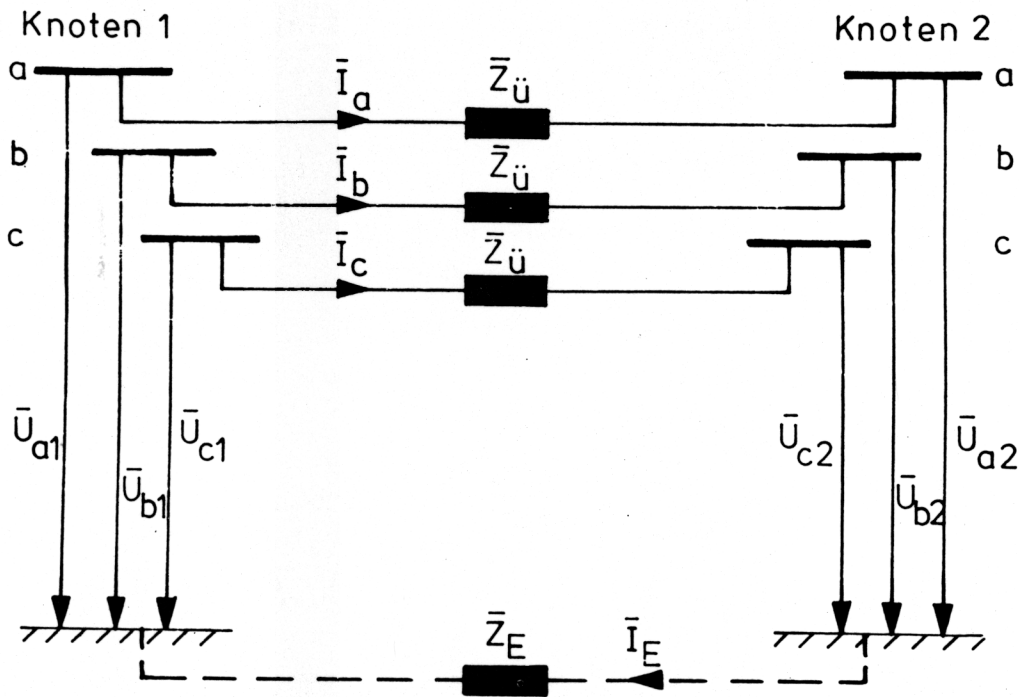


Bild 8.3-1 Dreiphasige Energieübertragung mit Impedanz $\bar{Z}_E$ für den Ausgleichsstrom der unsymmetrischen Belastung

bild müssen für den unsymmetrischen Betriebszustand sowohl alle drei Leiter wie auch die Rückleitung für den Ausgleichsstrom, der durch die Vektorsumme

$$\bar{I}_E = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \quad (8.3-1)$$

gegeben ist, dargestellt werden. In Bild 8.3-1 wird angenommen, daß der Ausgleichsstrom $\bar{I}_E$ durch die Erdimpedanz $\bar{Z}_E$ gegeben ist. Allgemein ist jedoch festzuhalten, daß die den Ausgleichsstrom $\bar{I}_E$ festlegende Impedanz $\bar{Z}_E$ durch den im allgemeinen unbekannten Strompfad von $\bar{I}_E$ bestimmt ist. Deshalb muß man für die Bestimmung von $\bar{Z}_E$ auf Messungen oder entsprechende, durch Rechnung nur teilweise zu bestimmende Erfahrungswerte zurückgreifen.

Für den Spannungsabfall zwischen den beiden in Bild 8.3-1 gezeigten Schaltanlagen gilt allgemein

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{a1} \\ \bar{U}_{b1} \\ \bar{U}_{c1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{U}_{a2} \\ \bar{U}_{b2} \\ \bar{U}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{\bar{u}} + \bar{Z}_E & \bar{Z}_E & \bar{Z}_E \\ \bar{Z}_E & \bar{Z}_{\bar{u}} + \bar{Z}_E & \bar{Z}_E \\ \bar{Z}_E & \bar{Z}_E & \bar{Z}_{\bar{u}} + \bar{Z}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} \quad (8.3-2)$$

In Vektorschreibweise gilt mit physikalischen Größen

$$U_{p1} - U_{p2} = Z_p I_p \quad (8.3-3)$$

Die Transformation auf symmetrische Komponenten ergibt für die Impedanzmatrix Z_s mit Gl. (8.2-16)

$$Z_s = T^{-1} Z_p T = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{\bar{u}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_{\bar{u}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_{\bar{u}} + 3 \bar{Z}_E \end{bmatrix} \quad (8.3-4)$$

Daraus folgt, daß das Ersatzschaltbild des Übertragungselementes im Mit- und Gegensystem durch das bereits in Kapitel 2 behandelte symmetrische Ersatzschaltbild gegeben ist. Ohne Vernachlässigung der Querglieder erhält man für das Mit- und Gegensystem der Freileitung oder des Kabels das in Tabelle 2.1 vorgestellte π -Ersatzschaltbild. Das Ersatzschaltbild des Nullsystems zeigt Bild 8.3-2. Es besteht aus der Längsimpedanz $\bar{Z}_0$ des Übertragungselementes sowie dem dreifachen Wert der Rückleitungsimpedanz $\bar{Z}_E$; somit ist die Nullimpedanz eines Übertragungselementes durch

$$\bar{Z}_0 = \bar{Z}_0 + 3 \bar{Z}_E \quad (8.3-5)$$

gegeben.

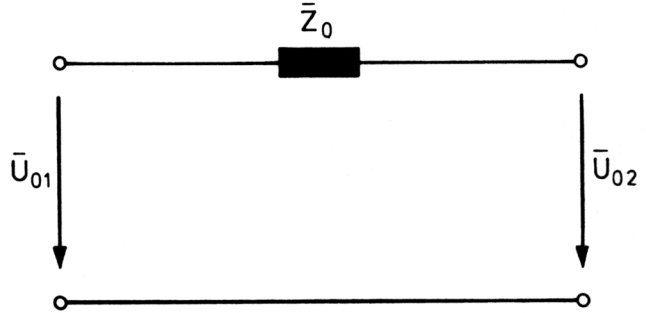


Bild 8.3-2 Nullsystem eines passiven Übertragungselementes (Freileitung oder Kabel)

8.3.2 Synchronmaschine

Der allgemeine Betriebszustand einer Synchronmaschine ist durch die Vektorbeziehung

$$\underline{U}_p = \underline{E}_p - \underline{Z}_p \underline{I}_p \quad (8.3-6)$$

gegeben. Dabei ist der Vektor $\underline{U}_p$ durch die drei Klemmenspannungen $\bar{U}_a$, $\bar{U}_b$ und $\bar{U}_c$ gegeben; die durch die Erregung der Maschine festgelegten Polradspannungen $\bar{E}_a$, $\bar{E}_b$ und $\bar{E}_c$ bilden den Vektor $\underline{E}_p$. Die drei Strangströme $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ und $\bar{I}_c$ definieren den Vektor $\underline{I}_p$. Die Impedanzmatrix $\underline{Z}_p$ ist durch die Induktivitäten der Stator- und Rotorwicklungen der Maschine sowie den zugehörigen ohmschen Widerständen gegeben. Sie hat die allgemeine Form einer zyklisch-symmetrischen Matrix

$$\underline{Z}_p = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_3 & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 & \bar{Z}_1 \end{bmatrix} . \quad (8.3-7)$$

In Komponentenschreibweise gilt somit für Gl. (8.3-6)

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_a \\ \bar{E}_b \\ \bar{E}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_3 & \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 & \bar{Z}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} . \quad (8.3-8)$$

Tabelle 8-1 Synchronmaschinen-Reaktanzen für die Ersatzschaltungen in symmetrischen Komponenten (Mitsystem-Reaktanzen siehe Tabelle 7-1)

Reaktanz	Turboläufer	Wasserkraft- generator	Synchronmotor	
			langsam	schnell
X_-	0,13	0,2	0,35	0,19
X_0	0,04	0,07	0,07	0,05

Mit den in Abschnitt 8.2 behandelten Transformationsvorschriften erhält man für den Übergang auf symmetrische Komponenten

$$TU_s = E_p - Z_p TI_s . \quad (8.3-9)$$

Die Auflösung nach U_s ergibt nun unter Verwendung von Gl. (8.2-16)

$$U_s = T^{-1}E_p - T^{-1}Z_p TI_s = T^{-1}E_p - Z_s I_s . \quad (8.3-10)$$

Die Auswertung dieser Gleichung unter der Voraussetzung, daß die Polradspannungen $\bar{E}_a$, $\bar{E}_b$ und $\bar{E}_c$ betragsmäßig gleich groß und jeweils um 120° gegeneinander phasenverschoben sind, ergibt

$$T^{-1}E_p = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_a \\ \bar{a}^2 \bar{E}_a \\ \bar{a} \bar{E}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (8.3-11)$$

Die symmetrische Komponentenmatrix Z_s in Gl. (8.3-10) ist definitionsgemäß eine Diagonalmatrix der Form

$$Z_s = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{a}^2 \bar{Z}_2 + \bar{a} \bar{Z}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_1 + \bar{a} \bar{Z}_2 + \bar{a}^2 \bar{Z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{bmatrix} . \quad (8.3-12)$$

Die Impedanz des Mitsystems beträgt $\bar{Z}_+ = \bar{Z}_1 + \bar{a}^2 \bar{Z}_2 + \bar{a} \bar{Z}_3$; diejenige des Gegensystems $\bar{Z}_- = \bar{Z}_1 + \bar{a} \bar{Z}_2 + \bar{a}^2 \bar{Z}_3$; diejenige des Nullsystems $\bar{Z}_0 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3$. In symmetrischer Komponentenform gelten somit für die Synchronmaschine folgende Beziehungen

$$\text{Mitsystem: } \bar{U}_+ = \bar{E}_a - \bar{Z}_+ \bar{I}_+ \quad (8.3-13)$$

$$\text{Gegensystem: } \bar{U}_- = 0 - \bar{Z}_- \bar{I}_- \quad (8.3-14)$$

$$\text{Nullsystem: } \bar{U}_0 = 0 - \bar{Z}_0 \bar{I}_0 . \quad (8.3-15)$$

Bild 8.3-3 zeigt die drei Ersatzschaltbilder der Synchronmaschine in Komponentenform; Tabelle 8-1 enthält typische Reaktanzwerte in bezogener Darstellung für die Komponenten-Ersatzschaltbilder. Damit sind die Werte der Tabelle 7-1 ergänzt worden. Die Mitimpedanz $\bar{Z}_+$ entspricht der Längsimpedanz $\bar{Z}_d = j X_d$ der Synchronmaschine im stationären Zustand. Für die Berechnung transienter resp. subtransienter

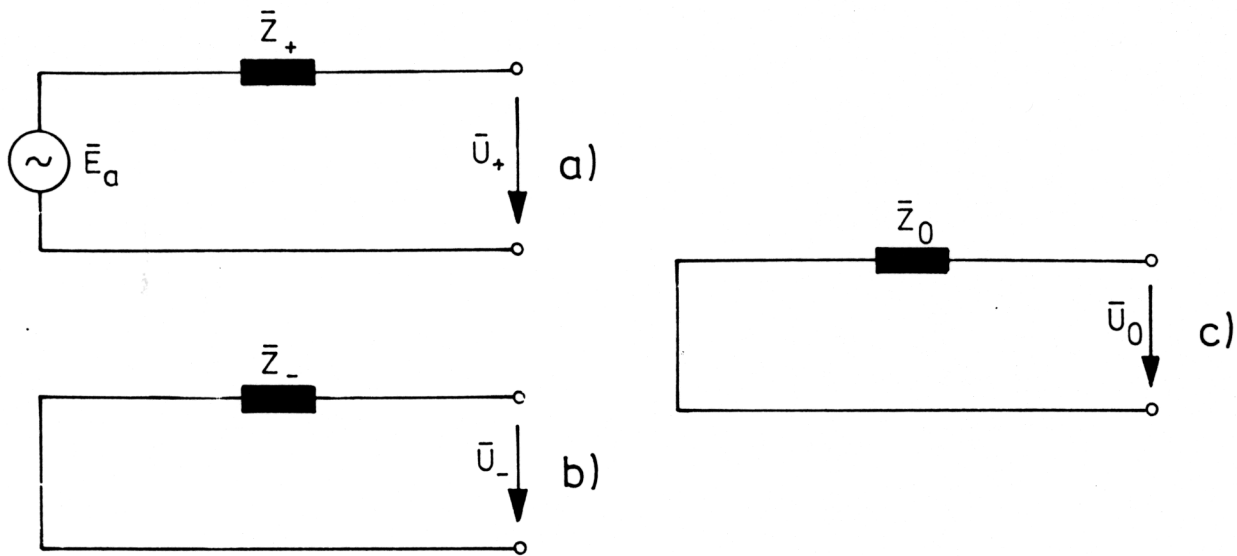


Bild 8.3-3 Ersatzschaltung des Generators im Mit-, Gegen- und Nullsystem

Größen ist $\bar{Z}_+$ durch $j X'_d$ resp. $j X''_d$ gegeben. Somit entspricht das Mitsystem dem in Kapitel 7 benutzten symmetrischen Ersatzschaltbild für Synchronmaschinen. Während das Mitsystem eine Spannungsquelle enthält, sind das Gegen- und Nullsystem passive Netzwerke ohne Quellen. Für praktische Berechnungen kann $\bar{Z}_+ = \bar{Z}_-$ gesetzt werden; die Nullimpedanz $\bar{Z}_0$ ist wesentlich kleiner als die Mit- und Gegenreaktanzen.

8.3.3 Drehstromtransformatoren

Bezüglich des Mit- und Gegensystems kann auf die Überlegungen von Abschnitt 8.3.1 zurückgegriffen werden. Demzufolge ist das Ersatzschaltbild für Mit- und Gegensystem mit dem in Tabelle 2-1 gezeigten Ersatzschaltbild für den symmetrischen Betrieb identisch. In der bezogenen Darstellung bestimmt somit die Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ das Verhalten des Mit- und Gegensystems, solange der Transformator mit dem Nennübersetzungsverhältnis betrieben wird. Anderenfalls muß auf die Überlegungen von Abschnitt 2.3 zurückgegriffen werden.

Für die Formulierung des Ersatzschaltbildes des Nullsystems ist der Strompfad des Ausgleichsstromes maßgebend. Beim Drehstromtransformator spielen dabei zwei Gesichtspunkte eine wichtige Rolle: a) Wicklungsart und b) Sternpunktbehandlung. Ein dem Nullstrom entsprechender Ausgleichsstrom kann nur dann fließen, wenn ein entsprechender Strompfad vorhanden ist. In einer sternförmigen oder Y-Schaltung ohne Sternpunktterdung (isolierter Sternpunkt) muß die Summe der drei Leiterströme Null sein; d. h. die entsprechende Nullimpedanz ist unendlich groß. Das Nullsystem hat im Ersatzschaltbild in diesem Fall einen Unterbruch.

Ist bei der gleichen Schaltungsform der Sternpunkt jedoch starr geerdet, so findet der sich nun ausbildende Ausgleichsstrom keinen Widerstand; d. h. das Ersatzschaltbild des Nullsystems erhält an der entsprechenden Stelle eine Kurzschlußverbindung.

Eine Dreiecks- oder Δ -Schaltung bietet dem Ausgleichsstrom innerhalb der Schaltung die Möglichkeit, sich auszubilden. Es besteht jedoch kein Strompfad über Erde, so daß hier entsprechend einer unendlich großen Impedanz eine Unterbrechung des Strompfades im Ersatzschaltbild des Nullsystems vorzusehen ist. Bild 8.3-4 zeigt die drei erwähnten Schaltungsarten mit den entsprechenden Ersatzschaltungen im Nullsystem.

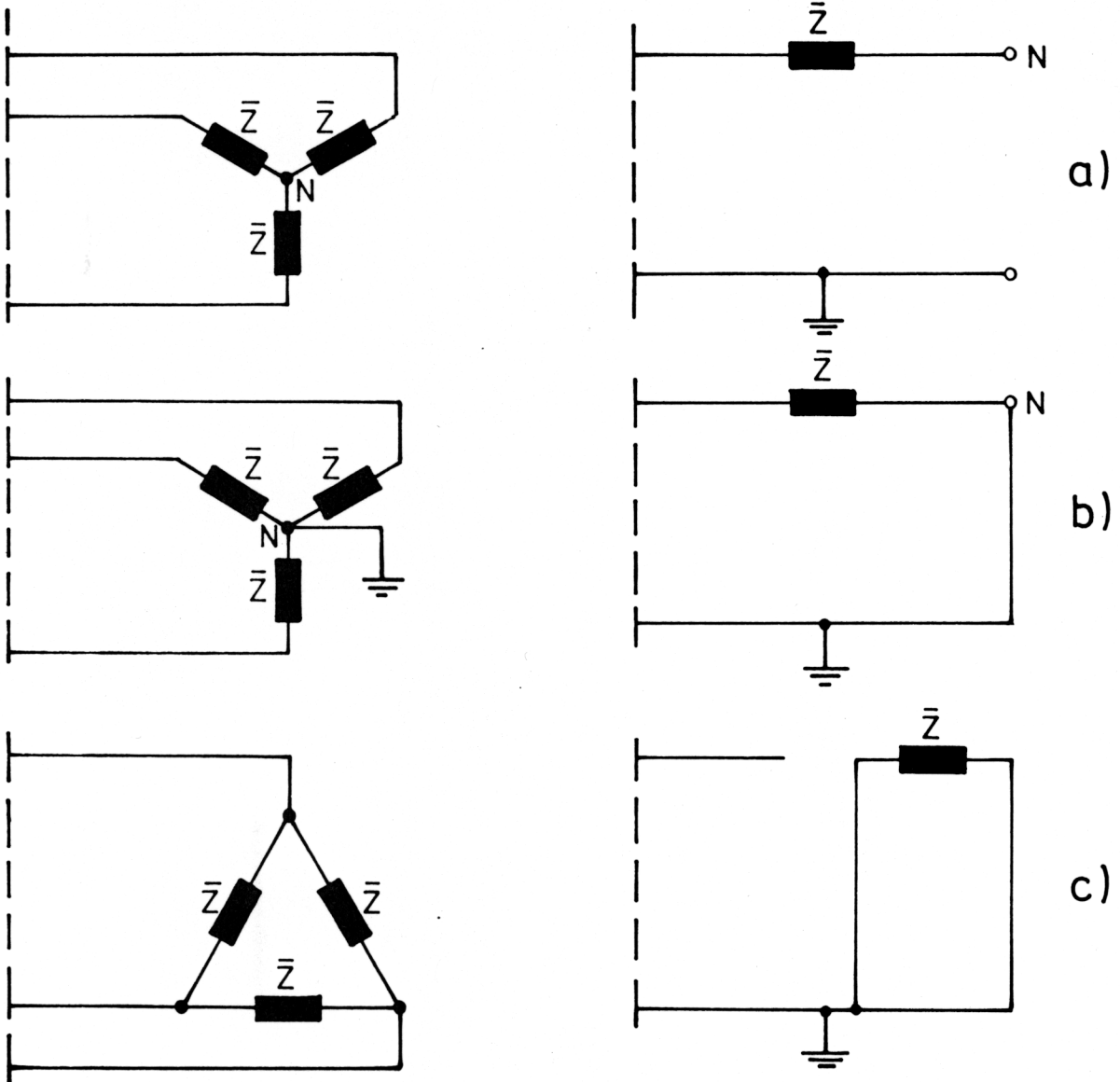


Bild 8.3-4 Ersatzschaltung des Nullsystems für a) Y-Schaltung ohne Sternpunkt-Erdung
b) Y-Schaltung mit Sternpunkt-Erdung
c) Δ-Schaltung

Mit diesen Überlegungen kann nun die Ersatzschaltung für das Nullsystem eines beliebig geschalteten Drehstromtransformators hergeleitet werden. Dazu verwendet man die Eigenschaft, daß auf der Primärseite des Transformators so lange kein Strom fließt, als auf der Sekundärseite kein Strom fließt. Dabei vernachlässigt man den stets auftretenden kleinen Magnetisierungsstrom. Ferner verwendet man die Eigenschaft, daß der Primärstrom durch das Übersetzungsverhältnis und den Sekundärstrom gegeben ist. Darauf aufbauend sind in Bild 8.3-5 fünf mögliche Schaltungen für Drehstromtransformatoren und deren zugehöriges Ersatzschaltbild für das Nullsystem dargestellt.

Für die Yy0-Schaltung in Bild 8.3-5 a mit nur primärseitig geerdetem Sternpunkt kann sekundärseitig kein Strom fließen, so daß zwischen Primär- und Sekundärseite im Nullsystem ein Unterbruch besteht. Sind jedoch beide Sternpunkte wie in Bild 8.3-5 b geerdet, bildet sich ein Nullstrom aus, dessen Größe durch die Kurzschlußimpedanz $\bar{Z}_k$ des Transformators bestimmt ist.

Falls der Sternpunkt einer Yd5-Schaltung eines Drehstromtransformators geerdet ist (Bild 8.3-5 c), fließt auf der Primärseite ein Nullstrom, da auf der Sekundärseite in der Δ-Schaltung ein Kreisstrom fließen kann. Der Primär-Nullstrom ist durch $\bar{Z}_k$ be-

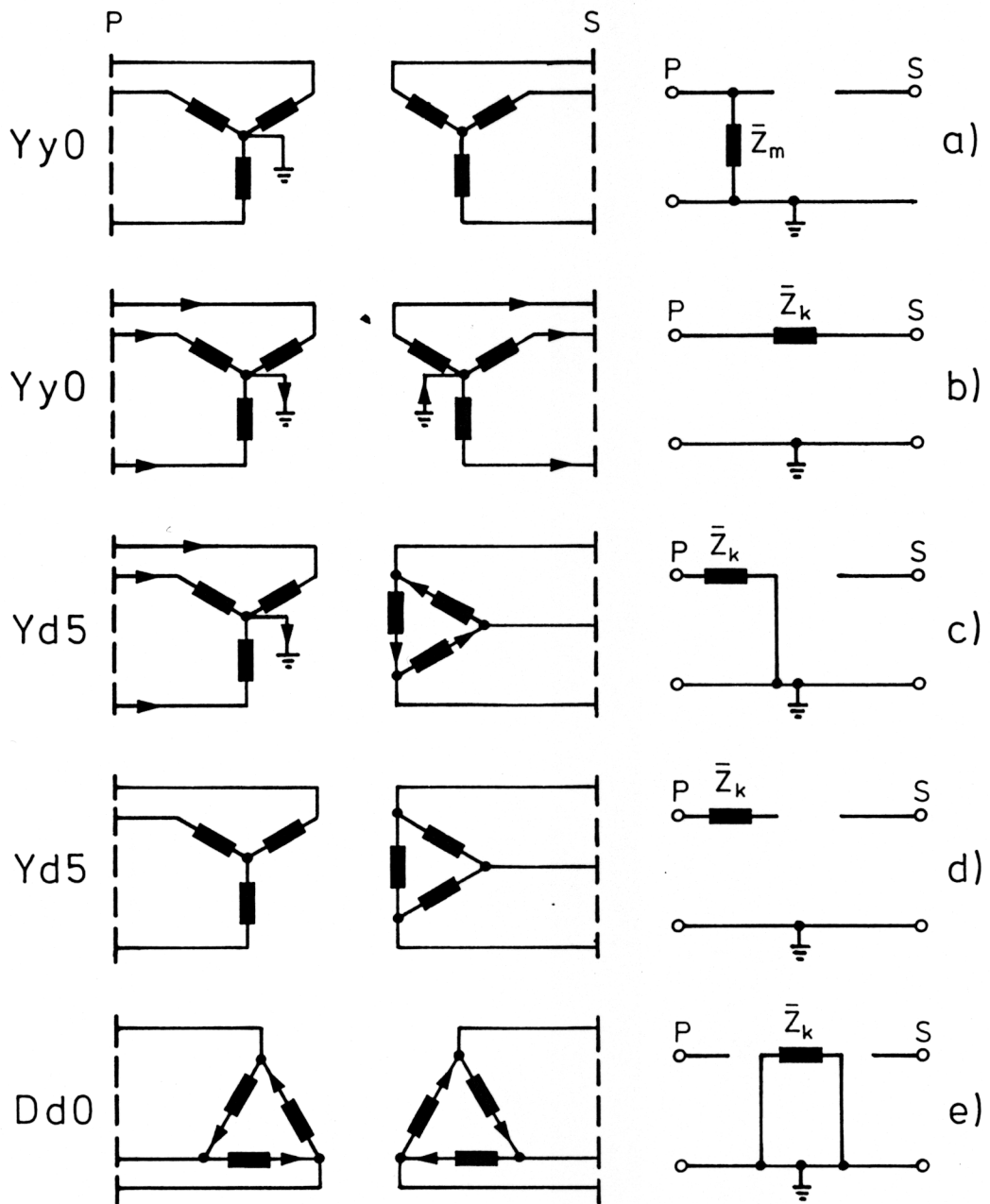


Bild 8.3-5 Schaltgruppen von Drehstromtransformatoren und entsprechende Ersatzschaltungen für das Nullsystem

stimmt. Wenn der Sternpunkt dieser Schaltung nicht geerdet ist, so kann entsprechend Bild 8.3-5 d weder auf der Primär- noch auf der Sekundärseite ein Nullstrom fließen.

Schließlich zeigt Bild 8.3-5 e eine $Dd0$ -Schaltung. Da sie keinen Strompfad für den Ausgleichsstrom hat, kann über Erde kein Nullstrom fließen, obwohl er sowohl innerhalb der primärseitigen Δ -Wicklung wie auch der sekundärseitigen Δ -Wicklung fließen kann.

8.4 Anwendungen auf unsymmetrische Fehler

Die Ersatzschaltbilder in symmetrischen Komponenten können durch geeignete Verbindung untereinander für die Berechnung der unsymmetrischen Fehlergrößen verwendet werden. Die Art der Verbindung hängt von der Fehlerart ab. Für die folgenden

Ausführungen werden der hochgestellte Index „0“ für Größen verwendet, die vor Auftreten des Fehlers gelten und der hochgestellte Index „f“ für Größen, wie sie im Fehlerfall auftreten. Sofern jedoch für den Betriebszustand vor Auftreten des Fehlers angenommen wird, daß sich das System im Leerlauf befindet, wird der Zusatzindex „f“ in den Fällen, wo keine Verwechslungsgefahr besteht, weggelassen. Spannungen sind stets Leiter-Erd-Spannungen und Ströme stets Leiterströme.

8.4.1 Einpoliger Erdkurzschluß

Bild 8.1-1 d zeigt einen einpoligen Erdkurzschluß, wobei die Fehlerimpedanz zwischen Leiter a und Erde gleich Null angenommen wird. Da im Hinblick auf den einpoligen Kurzschluß in Leiter a die Leiterströme $I_b^f = I_c^f = 0$ sind und die Leiterspannung $U_a^f = 0$ ist, gilt mit der Transformationsvorschrift (8.2-8)

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_+^f \\ \bar{I}_-^f \\ \bar{I}_0^f \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a^f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{I}_a^f \\ \bar{I}_a^f \\ \bar{I}_a^f \end{bmatrix} . \quad (8.4-1)$$

Somit sind die drei Komponentenströme alle gleich groß; d. h. aus Gl. (8.4-1) folgt

$$\bar{I}_+^f = \bar{I}_-^f = \bar{I}_0^f = \frac{1}{3} \bar{I}_a^f . \quad (8.4-2)$$

Ferner folgt aus Gl. (8.2-11) für die Spannungen die Beziehung

$$\bar{U}_+^f + \bar{U}_-^f + \bar{U}_0^f = 0 . \quad (8.4-3)$$

Die Gl. (8.4-2) und (8.4-3) führen zu der in Bild 8.4-1 gezeigten Reihen-Schaltung von Mit-, Gegen- und Nullsystem an der Fehlerstelle F . Durch Reduktion der Impedanzen in den drei Ersatzschaltungen von Mit-, Gegen- und Nullsystem sowie der Anwendung des Satzes von THEVENIN lassen sich damit die Fehlerströme und Spannungen zunächst in symmetrischen Komponenten an der Fehlerstelle F berechnen. Durch die inverse Transformation können daran anschließend die physikalischen Größen berechnet werden.

8.4.2 Zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung

Bild 8.1-1 b zeigt einen zweipoligen Kurzschluß ohne Erdberührung, wobei die Fehlerimpedanz zwischen den beiden Leitern b und c Null ist. In diesem Fehlerfall gilt offensichtlich $\bar{I}_b^f = -\bar{I}_c^f$ und $\bar{I}_a^f = 0$. Ferner ist die Spannungsdifferenz zwischen den beiden fehlerhaften Leiterspannungen gleich Null

$$\bar{U}_b^f = \bar{U}_c^f . \quad (8.4-4)$$

Die Transformation auf symmetrische Komponenten ergibt mit Gl. (8.2-8)

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_+^f \\ \bar{I}_-^f \\ \bar{I}_0^f \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{I}_c^f \\ \bar{I}_c^f \end{bmatrix} = \frac{\bar{I}_c^f}{3} \begin{bmatrix} -\bar{a} + \bar{a}^2 \\ -\bar{a}^2 + \bar{a} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (8.4-5)$$

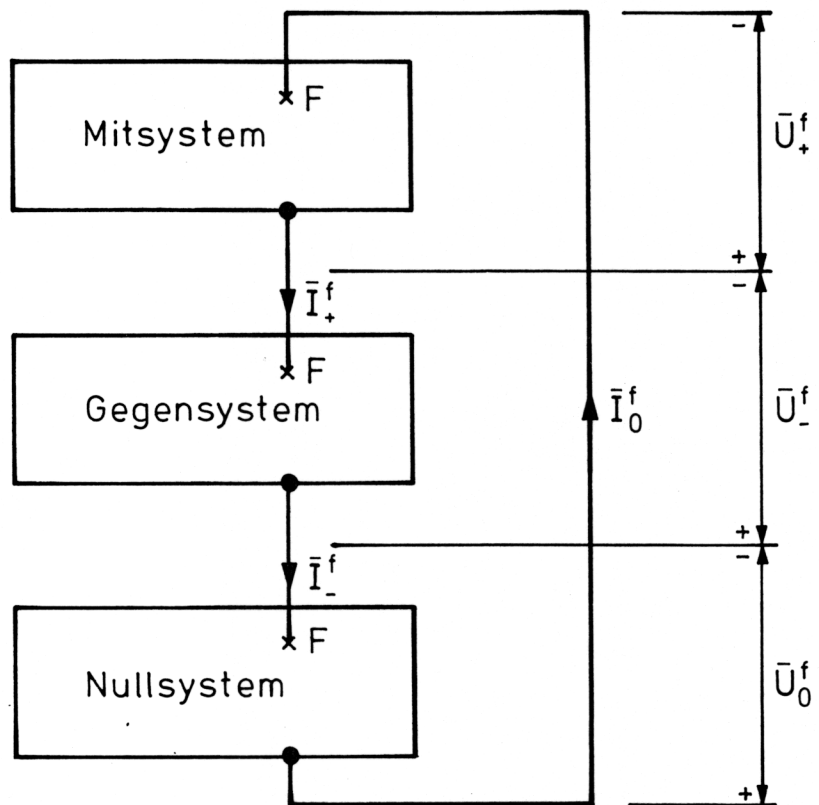


Bild 8.4-1 Zusammenschaltung der symmetrischen Komponenten-Ersatzschaltbilder für die Berechnung des einpoligen Erdkurzschlusses

Somit gilt für die Ströme des Mit- und Gegensystems einerseits und für den Nullstrom andererseits

$$\bar{I}_+^f = -\bar{I}_-^f \quad \text{und} \quad \bar{I}_0^f = 0. \quad (8.4-6)$$

Ferner folgt aus Gl. (8.4-4) in Gl. (8.2-10) eingesetzt

$$\bar{U}_+^f = \bar{U}_-^f. \quad (8.4-7)$$

Die Gl. (8.4-6) und (8.4-7) führen zu der in Bild 8.4-2 gezeigten Parallelschaltung von Mit- und Gegensystem an der Fehlerstelle F . Das Nullsystem tritt nicht auf, da kein Ausgleichsstrom fließen kann.

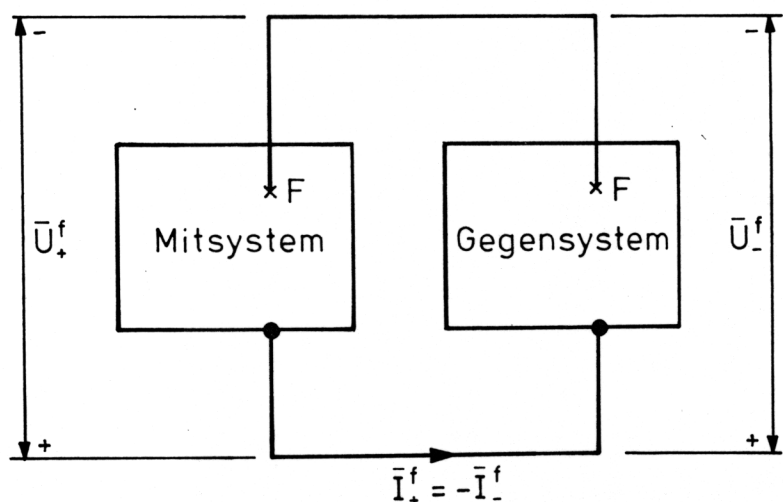


Bild 8.4-2 Zusammenschaltung der symmetrischen Komponenten für den zweipoligen Fehler ohne Erdbewührung

8.4.3 Zweipoliger Kurzschluß mit Erdberührung

Bild 8.1-1 c zeigt einen zweipoligen Kurzschluß mit Erdberührung, wobei die Fehlerimpedanz zwischen den Leitern b und c sowie gegenüber Erde gleich Null ist. In diesem Fehlerfall gilt offensichtlich $\bar{I}_a^f = 0$ und $\bar{U}_b^f = \bar{U}_c^f = 0$. Berücksichtigt man diese Eigenschaften bei der Transformation auf symmetrische Komponenten, ergibt sich mit Gleichung (8.2-8) für die Summe der Komponenten-Ströme

$$\bar{I}_+^f + \bar{I}_-^f + \bar{I}_0^f = 0 \quad (8.4-8)$$

Für die Spannungen erhält man entsprechend der Transformations-Gleichung (8.2-10)

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_+^f \\ \bar{U}_-^f \\ \bar{U}_0^f \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 \\ 1 & \bar{a}^2 & \bar{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_a^f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4-9)$$

die Bedingung $\bar{U}_+^f = \bar{U}_-^f = \bar{U}_0^f$. Entsprechend den Gln. (8.4-7) und (8.4-8) müssen die drei Komponentensysteme gemäß Bild 8.4-3 an der Fehlerstelle parallel geschaltet werden.

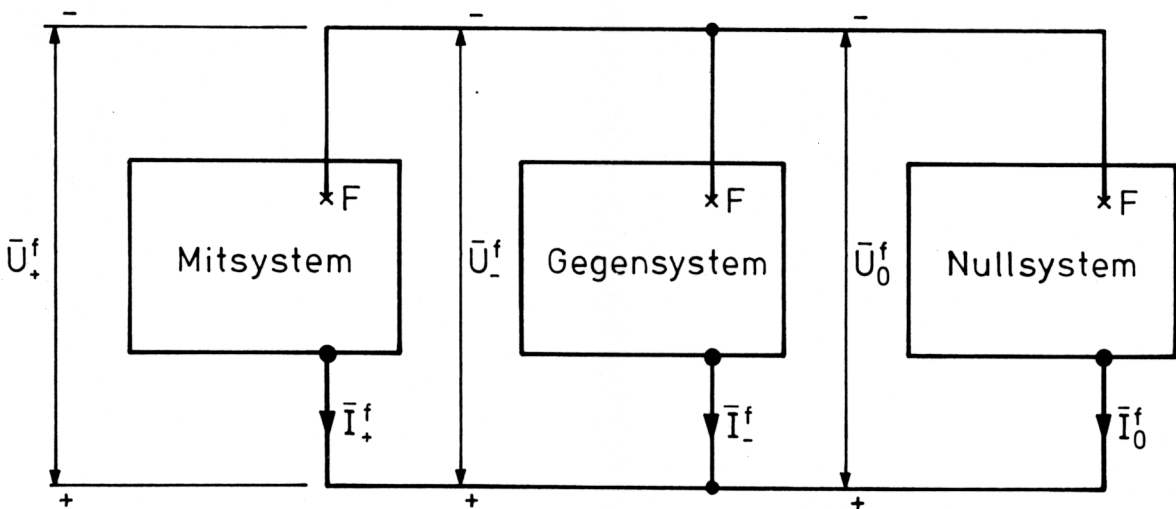


Bild 8.4-3 Zusammenschaltung der symmetrischen Komponenten für den zweipoligen Fehler mit Erdberührung

Die Ausführungen dieses Abschnittes sollen in anschaulicher Weise die Bedeutung der symmetrischen Komponenten für die unsymmetrische Fehlerberechnung darstellen. Diese Vorgehensweise kann prinzipiell auf beliebige Systeme angewendet werden, indem man zunächst die Ersatzschaltungen für das Mit-, Gegen- und Nullsystem aufstellt, diese Ersatzschaltungen der Fehlerart entsprechend miteinander verbindet und dann nach der Netzreduktion und Anwendung des Satzes von THEVENIN für das Mitsystem die gesuchten Fehlergrößen bestimmt.

Mit dem Ziel, diese Netzreduktion mit dem Rechner durchführen zu können, wird im nächsten Abschnitt auf die systematische, Rechner-orientierte Vorgehensweise für die Berechnung unsymmetrischer Fehler eingegangen.

8.5 Digitale Berechnung

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung in die numerische Berechnung unsymmetrischer Fehler. Dabei wird einerseits von den symmetrischen Komponenten und andererseits von dem in Kapitel 7 eingeführten Theorem von THEVENIN und dem Überlagerungssatz Gebrauch gemacht. Um die Vorgehensweise in kompakter Form darstellen zu können, wird ausführlich auf die Matrizenrechnung zurückgegriffen.

8.5.1 Ersatzschaltung des Netzes in symmetrischen Komponenten

Aufbauend auf den Überlegungen von Abschnitt 8.3 muß für das zu untersuchende Netz die Ersatzschaltung im Mit-, Gegen- und Nullsystem bestimmt werden. Dabei wird man zweckmäßigerweise von der Knotenadmittanzmatrix Y_k oder Knotenimpedanzmatrix $Z_k = Y_k^{-1}$ Gebrauch machen, da damit eine einfache, lineare Beziehung zwischen den Knotenspannungen und -ströme in den drei Komponenten-Schaltungen aufgestellt werden können. In Kapitel 2 ist die Knotenadmittanzmatrix Y_k für die einphasige Wechselstrom-Ersatzschaltung zur Berechnung des symmetrischen, stationären Netzbetriebes aufgestellt worden. Entsprechend den bisherigen Überlegungen stimmt diese Matrix Y_k mit der Knotenadmittanzmatrix des Mitsystems Y_{+k} überein. Mit den bereits erwähnten Regeln zum Aufstellen von Knotenadmittanzmatrizen sind die Knotenadmittanzmatrizen des Gegensystems Y_{-k} und des Nullsystems Y_{0k} aufzustellen.

In der Darstellung mit symmetrischen Komponenten lautet die Systembeschreibung somit

$$\text{Mitsystem: } I_{+k} = Y_{+k} U_{+k} . \quad (8.5-1)$$

Die entsprechende Form mit der Knotenimpedanzmatrix Z_{+k} lautet

$$\text{Mitsystem: } U_{+k} = Z_{+k} I_{+k} . \quad (8.5-2)$$

Der Knotenstromvektor I_{+k} resp. der Knotenspannungsvektor U_{+k} des Mitsystems sind wie folgt definiert

$$U_{+k} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{+1} \\ \bar{U}_{+2} \\ \vdots \\ \bar{U}_{+n} \end{bmatrix} \quad I_{+k} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{+1} \\ \bar{I}_{+2} \\ \vdots \\ \bar{I}_{+n} \end{bmatrix} . \quad (8.5-3)$$

Die komplexe Knotenspannung $\bar{U}_{+i}$ im Knoten i resp. der komplexe Knotenstrom $\bar{I}_{+i}$ im Knoten i gelten für das Mitsystem. Die gesamte Knotenzahl des Netzes ist mit n bezeichnet.

In analoger Weise erhält man die Gegen- und Nullsystem-Knotenadmittanzmatrizen Y_{-k} resp. Y_{0k} sowie die zugehörigen Knotenimpedanzmatrizen Z_{-k} resp. Z_{0k} . Dazu muß zunächst das Ersatzschaltbild des Gegen- und Nullsystems aufgestellt werden. Unter Verwendung des in Abschnitt 2.4.1 aufgestellten Bildungsgesetzes für Knotenadmittanzmatrizen erhält man Y_{-k} resp. Y_{0k} . Somit gilt

$$\text{Gegensystem: } I_{-k} = Y_{-k} U_{-k} . \quad (8.5-4)$$

In der Impedanzform lautet die entsprechende Beziehung

$$\text{Gegensystem: } U_{-k} = Z_{-k} I_{-k} . \quad (8.5-5)$$

Schließlich lautet die Systembeschreibung im Nullsystem

$$\text{Nullsystem: } I_{0k} = Y_{0k} U_{0k} . \quad (8.5-6)$$

Wählt man die Impedanzform für das Nullsystem, so gilt

$$\text{Nullsystem: } U_{0k} = Z_{0k} I_{0k} . \quad (8.5-7)$$

Die Knotenspannungs- und -stromvektoren U_{-k} , I_{-k} , U_{0k} und I_{0k} des Gegen- und Nullsystems sind wie folgt definiert

$$U_{-k} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{-1} \\ \bar{U}_{-2} \\ \vdots \\ \bar{U}_{-n} \end{bmatrix} \quad I_{-k} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{-1} \\ \bar{I}_{-2} \\ \vdots \\ \bar{I}_{-n} \end{bmatrix} . \quad (8.5-8)$$

Entsprechend erhält man für das Nullsystem

$$U_{0k} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{01} \\ \bar{U}_{02} \\ \vdots \\ \bar{U}_{0n} \end{bmatrix} \quad I_{0k} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{01} \\ \bar{I}_{02} \\ \vdots \\ \bar{I}_{0n} \end{bmatrix} . \quad (8.5-9)$$

Alle hier definierten Strom- und Spannungsvektoren sind n -dimensionale, komplexe Vektoren, wobei n die Anzahl der Netzknoten angibt.

8.5.2 Zusammenfassung der drei Komponenten-Systeme

Für das weitere Vorgehen ist es zweckmäßig, die drei Gleichungssysteme (8.5-1), (8.5-4) und (8.5-6) des Mit-, Gegen- und Nullsystems in ein einziges $(3n)$ -dimensionales Gleichungssystem zusammenzufassen. Dabei werden die Komponenten der drei n -dimensionalen Spannungsvektoren (8.5-3), (8.5-8) und (8.5-9) in einen neuen $(3n)$ -dimensionalen Vektor zusammengefaßt. Dieselbe Vorgehensweise wird auch für die drei Stromvektoren gewählt, wobei folgende Anordnung der Komponenten vereinbart werden soll

$$U_s = \begin{bmatrix} \bar{U}_{+1} \\ \bar{U}_{-1} \\ \bar{U}_{01} \\ \vdots \\ \bar{U}_{+k} \\ \bar{U}_{-k} \\ \bar{U}_{0k} \\ \vdots \\ \bar{U}_{+n} \\ \bar{U}_{-n} \\ \bar{U}_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{s1} \\ \vdots \\ U_{sk} \\ \vdots \\ U_{sn} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad I_s = \begin{bmatrix} \bar{I}_{+1} \\ \bar{I}_{-1} \\ \bar{I}_{01} \\ \vdots \\ \bar{I}_{+k} \\ \bar{I}_{-k} \\ \bar{I}_{0k} \\ \vdots \\ \bar{I}_{+n} \\ \bar{I}_{-n} \\ \bar{I}_{0n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{s1} \\ \vdots \\ I_{sk} \\ \vdots \\ I_{sn} \end{bmatrix} . \quad (8.5-10)$$

Diese beiden neuen Vektoren U_s und I_s sind die Knotenspannungs- und Knotenstromvektoren des Mit-, Gegen- und Nullsystems dargestellt in symmetrischen Komponenten. Damit ist es möglich, die Gln. (8.5-1), (8.5-4) und (8.5-6) in eine einzige Gleichung zusammenzufassen

$$I_s = Y_s U_s . \quad (8.5-11)$$

Die $(3n, 3n)$ -dimensionale Matrix Y_s besteht aus den komplexen Elementen $\bar{y}_{+ij}$, $\bar{y}_{-ij}$ und $\bar{y}_{0ij}$ der Knotenadmittanzmatrizen Y_{+k} , Y_{-k} und Y_{0k} des Mit-, Gegen- und Nullsystems. Die Matrix Y_s ist in ihrer Struktur durch die in Gl. (8.5-10) verwendete Definition festgelegt

$$Y_s = \begin{bmatrix} \bar{y}_{+11} & 0 & 0 & \cdots & \bar{y}_{+1n} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{y}_{-11} & 0 & \cdots & 0 & \bar{y}_{-1n} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{y}_{011} & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}_{01n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_{+n1} & 0 & 0 & \cdots & \bar{y}_{+nn} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{y}_{-n1} & 0 & \cdots & 0 & \bar{y}_{-nn} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{y}_{0n1} & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}_{0nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{s11} & \cdots & Y_{s1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{sn1} & \cdots & Y_{snn} \end{bmatrix} . \quad (8.5-12)$$

Die Knotenadmittanzmatrix Y_s beschreibt die drei Komponenten-Darstellungen des Mit-, Gegen- und Nullsystems.

In manchen Fällen ist es zweckmäßig, anstelle der Admittanzdarstellung entsprechend der Gl. (8.5-11) von der Impedanz-Darstellung Gebrauch zu machen. In diesem Fall gilt die Beziehung

$$U_s = Z_s I_s , \quad (8.5-13)$$

wobei die Impedanzmatrix Z_s aus den drei Teilmatrizen Z_{+k} , Z_{-k} und Z_{0k} zu bilden ist. Diese Teilmatrizen werden entweder durch Inversion der Teiladmittanzmatrizen Y_{+k} , Y_{-k} und Y_{0k} bestimmt. Numerisch effizienter ist jedoch ein Verfahren, mit dem direkt von der Komponentendarstellung ausgehend die Teilmatrizen Z_{+k} , Z_{-k} und Z_{0k} aufgestellt werden. Auf dieses zweite Verfahren wird hier nicht näher eingegangen. Natürlich ist bei der Bildung der Impedanzmatrix Z_s aus den Teilmatrizen Z_{+k} , Z_{-k} und Z_{0k} in jedem Fall die Definitionsgleichung (8.5-10) zu beachten.

8.5.3 Satz von THEVENIN

Bei der Berechnung des symmetrischen Kurzschluß-Stromes in Kapitel 7 ist gezeigt worden, wie der Satz von THEVENIN benutzt wird, um die im Fehlerfall auftretenden Ströme berechnen zu können. Dieses Netzwerktheorem wird nun auf die Komponenten-Darstellung angewendet, so daß durch Kombination der Fehlerströme und der Betriebsströme vor dem Fehler der Gesamtstrom bestimmt werden kann.

Vor Auftreten des Fehlers wird für das Energieübertragungssystem ein bestimmter symmetrischer Betriebszustand zugrunde gelegt. Dieser Betriebszustand wird mit Hilfe der bereits bekannten Lastflußmethoden numerisch bestimmt. Das Ergebnis sind die komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i^0$ in allen Netzknoten $i = 1, 2, \dots, n$. Der Übergang auf die Darstellung mit symmetrischen Komponenten ist dabei besonders einfach, da definitionsgemäß im symmetrischen Betrieb die Gegen- und Nullkomponenten verschwinden, während die Mitkomponente durch eine der drei symmetrischen Phasengrößen gegeben ist. Damit kann auf der Basis der Lastflußberechnung sofort der $3n$ -dimensionale Knotenspannungsvektor U_s^0 in der Darstellung mit symmetrischen Komponenten angegeben werden. Es gilt

$$U_s^0 = \begin{bmatrix} \bar{U}_1^0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{U}_k^0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{U}_n^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.5-14)$$

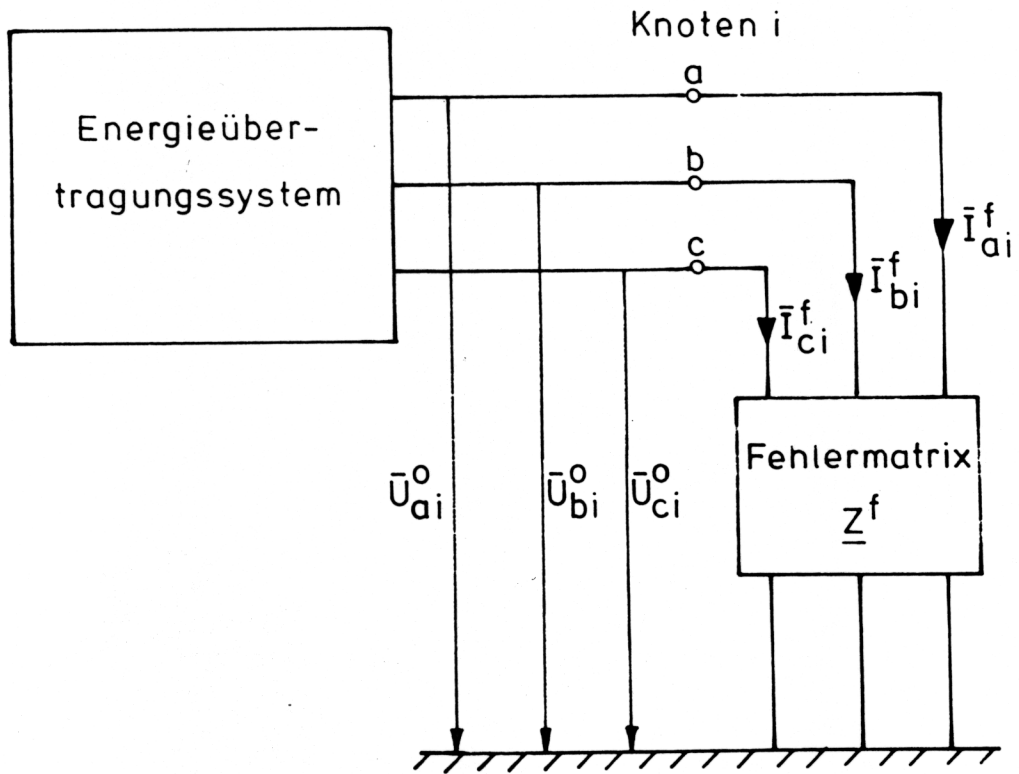
Für die Berechnung der Knotenspannungen im Fehlerfall wird nun analog zu Gl. (7.5-6) die Spannung vor dem Fehler U_s^0 und die mit dem THEVENIN-Theorem bestimmten Zusatzspannungen überlagert. Allerdings wird hier im Gegensatz zu Gl. (7.5-6) mit symmetrischen Größen und nicht mit physikalischen Leitergrößen gearbeitet. Mit Gln. (8.5-13) und (8.5-14) erhält man somit für den Fehlerfall den Spannungsvektor U_s^f in symmetrischen Komponenten

$$U_s^f = U_s^0 + Z_s I_s^f \quad (8.5-15)$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus $3n$ Gleichungen. Es kann erst dann gelöst werden, wenn der Fehlerstromvektor I_s^f ausgedrückt in symmetrischen Komponenten bekannt ist. Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Modellierung der Fehlerstelle F . Darauf aufbauend wird dann in Abschnitt 8.5.5 der an dieser Stelle noch unbekannte Fehlerstrom I_s^f berechnet.

8.5.4 Modellierung der Fehlerstelle

Analog zu der Schaltung der drei Komponentensysteme in Abschnitt 8.4 dient nun hier die Modellierung der Fehlerstelle F in symmetrischen Komponenten der Bestimmung des Fehlerstromes, um so das Gleichungssystem (8.5-15) lösen zu können. Für

Bild 8.5-1 Modellierung des unsymmetrischen Fehlers in Knoten i

die weiteren Überlegungen wird angenommen, daß der Fehler im Knoten i auftreten möge. Bild 8.5-1 zeigt, daß die Fehlerstelle F ganz allgemein durch eine beliebige Fehlermatrix Z^f beschrieben werden kann. Die Berechnung der Fehlermatrix Z^f für den einpoligen und zweipoligen Fehler wird in Abschnitt 8.5.6 im einzelnen vorgestellt.

Da Bild 8.5-1 mit physikalischen Größen gezeichnet worden ist, muß als nächstes die Umrechnung auf symmetrische Komponenten vorgenommen werden. Der Fehler in Knoten i führt zu den zu bestimmenden Fehlerströmen $\bar{I}_{ai}^f$, $\bar{I}_{bi}^f$ und $\bar{I}_{ci}^f$ in den drei Leitern a , b und c des Drehstromsystems. Damit können die Fehlerströme in Knoten i durch folgenden, physikalischen Vektor beschrieben werden

$$I_{pi}^f = \begin{bmatrix} \bar{I}_{ai}^f \\ \bar{I}_{bi}^f \\ \bar{I}_{ci}^f \end{bmatrix}. \quad (8.5-16)$$

Die Leiter-Erd-Spannungen im Knoten i nehmen im Fehlerfall die Werte $\bar{U}_{ai}^f$, $\bar{U}_{bi}^f$ und $\bar{U}_{ci}^f$ an und können ebenfalls in einen dreidimensionalen Vektor zusammengefaßt werden

$$U_{pi}^f = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ai}^f \\ \bar{U}_{bi}^f \\ \bar{U}_{ci}^f \end{bmatrix}. \quad (8.5-17)$$

Diese beiden Vektoren können entweder durch eine Impedanzbeziehung der Form

$$U_{pi}^f = Z^f I_{pi}^f \quad (8.5-18)$$

oder Admittanzbeziehung der Form

$$I_{pi}^f = Y^f U_{pi}^f \quad (8.5-19)$$

dargestellt werden. Die Struktur und die Elemente der Fehlerimpedanzmatrix Z^f resp. Admittanzmatrix Y^f hängen vom jeweiligen Fehlertyp ab (siehe Abschnitt 8.5.6).

Es ist festzuhalten, daß die Vektoren I_{pi}^f und U_{pi}^f die physikalischen Größen der Knotenströme und -spannungen im fehlerbehafteten Knoten i darstellen. Da die Gleichungen für das übrige Netz in symmetrischen Komponenten ausgedrückt werden, ist es notwendig, die Gl. (8.5-18) resp. (8.5-19) auf symmetrische Komponenten zu transformieren. Unter Verwendung der in Abschnitt 8.2 behandelten Transformationsvorschriften erhält man

$$U_{si}^f = Z_s^f I_{si}^f \quad (8.5-20)$$

resp. für die Admittanzdarstellung

$$I_{si}^f = Y_s^f U_{si}^f . \quad (8.5-21)$$

Die transformierten Fehlerimpedanz- resp. Admittanzmatrizen Z_s^f und Y_s^f sind mit den ursprünglichen Fehlermatrizen Z^f resp. Y^f durch folgende Beziehungen verbunden

$$Z_s^f = T^{-1} Z^f T \quad (8.5-22)$$

$$Y_s^f = T^{-1} Y^f T . \quad (8.5-23)$$

8.5.5 Bestimmung des Fehlerstromes I_s^f

In den bisherigen Überlegungen wurde vorausgesetzt, daß der unsymmetrische Fehler im Knoten i auftritt. Demzufolge ist dem THEVENIN-Satz entsprechend nur der i -te Komponenten-Vektor des Fehlerstromes I_s^f von Null verschieden. Somit gilt

$$I_s^f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I_{si}^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (8.5-24)$$

wobei an die Definition von I_{si}^f in Gl. (8.5-10) erinnert wird

$$I_{si}^f = \begin{bmatrix} \bar{I}_{+i}^f \\ \bar{I}_{-i}^f \\ \bar{I}_{0i}^f \end{bmatrix} . \quad (8.5-25)$$

Das Vorzeichen in Gl. (8.5-24) ist negativ, weil der Fehlerstrom I_{si}^f an der Fehlerstelle eingespeist wird.

Für die Bestimmung dieses Stromvektors I_{si}^f ist es zweckmäßig, den Überlagerungssatz der Gl. (8.5-15) in Komponenten-Schreibweise anzugeben. Dabei schreibt man nicht die $(3n)$ skalaren Komponenten an, sondern vielmehr die n symmetrischen Vektorkomponenten unter Beachtung der Definition (8.5-10)

$$\begin{aligned} U_{s1}^f &= U_{s1}^0 - Z_{s1i} I_{si}^f \\ &\vdots \\ U_{si}^f &= U_{si}^0 - Z_{sii} I_{si}^f \\ &\vdots \\ U_{sn}^f &= U_{sn}^0 - Z_{sni} I_{si}^f . \end{aligned} \quad (8.5-26)$$

Dabei ist bei der Matrizenmultiplikation $Z_s I_s^f$ von der Eigenschaft (8.5-24) Gebrauch gemacht worden. Demzufolge werden in Gl. (8.5-26) aus der Fehlermatrix Z_s nur die Teilmatrizen Z_{sji} mit $j = 1, 2, \dots, n$ benutzt.

Aus der i -ten Gleichung des linearen Gleichungssystems (8.5-26) und der i -ten Gleichung des linearen Gleichungssystems (8.5-20) kann nun die Knotenspannung U_{si}^f nach Auftreten des Fehlers eliminiert werden, wodurch eine Bestimmungsgleichung für den unbekannten Fehlerstrom I_{si}^f erhalten wird

$$U_{si}^f = Z_s^f I_{si}^f = U_{si}^0 - Z_{sii} I_{si}^f . \quad (8.5-27)$$

In diesem dreidimensionalen linearen Gleichungssystem sind alle Größen bis auf den Fehlerstrom I_{si}^f bekannt. Die Auflösung ergibt

$$I_{si}^f = (Z_s^f + Z_{sii})^{-1} U_{si}^0 . \quad (8.5-28)$$

Diese Vektorgleichung zur Bestimmung des Fehlerstromes I_{si}^f entspricht der skalaren Gl. (7.5-15) für die Berechnung des dreipoligen, symmetrischen Kurzschluß-Stromes.

Nachdem nun der Fehlerstrom I_{si}^f an der Fehlerstelle F im Knoten i ausgedrückt in symmetrischen Komponenten bekannt ist, können mit Gl. (8.5-26) die gesuchten Knotenspannungen nach Auftreten des Fehlers bestimmt werden

$$U_{sj}^f = U_{sj}^0 - Z_{sji} (Z_s^f + Z_{sii})^{-1} U_{si}^0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, j \neq i, \dots, n . \quad (8.5-29)$$

Für die Knotenspannung U_{si}^f an der Fehlerstelle F erhält man

$$U_{si}^f = Z_s^f (Z_s^f + Z_{sii})^{-1} U_{si}^0 . \quad (8.5-30)$$

Mit den Fehlerströmen I_{si}^f und allen Knotenspannungen U_{sj}^f nach Auftreten des Fehlers können die Kurzschluß-Ströme in allen Leitungen bestimmt werden. Für das die Knoten j und k verbindende Übertragungselement gilt für die Admittanzmatrix in symmetrischen Komponenten

$$Y_{s,jk} = \begin{bmatrix} \bar{y}_+ & 0 & 0 \\ 0 & \bar{y}_- & 0 \\ 0 & 0 & \bar{y}_0 \end{bmatrix} . \quad (8.5-31)$$

Für die Definition dieser komplexen Matrixelemente wird auf Abschnitt 8.3.1 verwiesen.

Die Kurzschluß-Ströme $I_{s,jk}^f$ der Leitung von Knoten j nach k sind nun durch die Gleichung

$$I_{s,jk}^f = Y_{s,jk} (U_{sj}^f - U_{sk}^f) \quad (8.5-32)$$

gegeben. Ist man an den drei Leiterströmen $\bar{I}_a^f$, $\bar{I}_b^f$ und $\bar{I}_c^f$ dieser Leitung interessiert, so muß der in symmetrischen Komponenten berechnete Fehlerstrom $I_{s,jk}^f$ zurücktransformiert werden.

8.5.6 Bestimmung der Fehlermatrizen Y_s^f

In diesem Abschnitt müssen die allgemeinen Überlegungen von Abschnitt 8.5.4 auf die einzelnen Fehlerarten angewendet werden. Dabei ist von der allgemeinen Transformation (8.2-16) auszugehen.

Der einpolige Erdkurzschluß in Leiter a kann mit physikalischen Leitergrößen wie folgt beschrieben werden. Falls die Admittanz zwischen dem Leiter a und Erde im Fehlerfall durch $\bar{Y}^f$ gegeben ist (Lichtbogenadmittanz), so gilt mit den Ausführungen in Abschnitt 8.4.1

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}^f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} \quad (8.5-33)$$

Die Transformationsvorschrift (8.2-18) ergibt für die Fehleradmittanzmatrix Y_s^f in symmetrischen Komponenten

$$Y_s^f = \frac{\bar{Y}^f}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5-34)$$

Es ist zu beachten, daß die Fehlerbeschreibung nach Gl. (8.5-33) nicht mit einer zyklischen Netzwerkmatrix erfolgt. Deshalb ist Y_s^f keine Diagonalmatrix.

Der zweipolige Kurzschluß zwischen den Leitern b und c ohne Erdberührung wurde in Abschnitt 8.4.2 behandelt. Hier gilt an der Fehlerstelle F die Beziehung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}^f & \bar{Y}^f \\ 0 & -\bar{Y}^f & \bar{Y}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix} \quad (8.5-35)$$

Die Transformationsvorschrift (8.2-18) ergibt für die Fehleradmittanzmatrix Y_s^f in symmetrischen Komponenten

$$Y_s^f = \bar{Y}^f \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5-36)$$

Wie bereits in Abschnitt 8.4.2 erwähnt, spielt in diesem Fehlerfall das Nullsystem keine Rolle und ist deshalb identisch gleich Null.

Der zweipolige Kurzschluß zwischen den Leitern b und c mit Erdberührung ist in Abschnitt 8.4.3 behandelt worden. Hier gilt an der Fehlerstelle F die Beziehung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}^f & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{bmatrix}. \quad (8.5-37)$$

Die Transformation auf symmetrische Komponenten liefert hier für die Fehlermatrix Y_s^f

$$Y_s^f = \bar{Y}^f \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (8.5-38)$$

Abschließend ist noch darauf hinzuweisen, daß für die hier behandelten Fehlerfälle die entsprechende Impedanzmatrix Z_s^f nicht existiert. Ferner ist für die Verbindung mit Abschnitt 8.4 festzuhalten, daß die Fehlermatrizen Y_s^f die Verschaltungen der drei Komponenten-Ersatzschaltungen beschreiben. Die in Bild 8.4-3 gezeigte Verschaltung für den zweipoligen Kurzschluß mit Erdberührung weist an der Fehlerstelle F die durch Gl. (8.5-38) gegebene Knotenadmittanzmatrix auf, sofern für die Admittanz zwischen den Leitern b und c einerseits und Erde andererseits der Wert $\bar{Y}^f$ angenommen wird.

8.6 Abschließende Bemerkungen

Die Beziehungen für die unsymmetrische Kurzschluß-Stromberechnung sind vollständig allgemein und können deswegen für jedes beliebige Energieübertragungssystem mit n Knoten verwendet werden. Ferner ist nochmals darauf hinzuweisen, daß der fehlerbehaftete Knoten i mit jedem beliebigen Netzknoten identifiziert werden kann. Schließlich sei erwähnt, daß die hier vorgestellte Fehlerstromberechnung die Vorbelastung des Systems mit berücksichtigt.

Wegen der Allgemeingültigkeit der Resultate müssen die Knotenadmittanz- resp. Knotenimpedanzmatrizen, dargestellt in symmetrischen Komponenten, nur einmal berechnet werden. Sie können dann abgespeichert werden und für die Fehlerstrom-Berechnung in jedem beliebigen Knoten verwendet werden.

Alle Beziehungen basieren auf dreidimensionalen Vektoren der symmetrischen Komponenten und (3,3)-dimensionalen Matrizen, die das Mit-, Gegen- und Nullsystem beschreiben. Die Teilmatrizen Z_{sij} resp. Y_{sij} sind Diagonalmatrizen; hingegen ist die Fehlerstelle F beschreibende Fehlermatrix Z_s^f resp. Y_s^f keine Diagonalmatrix.

Obwohl die Matrix Y_s von der Dimension $(3n, 3n)$ ist, muß man nur (n, n) dimensionale Matrizen, die das Mit-, Gegen- und Nullsystem beschreiben, invertieren, um die Impedanzmatrix Z_s der symmetrischen Komponenten zu erhalten. Der Grund dafür liegt in der vollständigen Entkopplung von Mit-, Gegen- und Nullsystem eines unsymmetrisch betriebenen Energieübertragungssystems.

Die bisher abgeleiteten Beziehungen geben die Ströme und Spannungen nach Auftreten von Fehlern mit Hilfe der symmetrischen Komponenten an. Da die einzelnen

Leiterströme und -spannungen von Interesse sind, muß im Anschluß an jede Fehleranalyse eine inverse Transformation der symmetrischen Komponenten auf physikalische Leitergrößen ausgeführt werden. Dazu ist die Gl. (8.2-6) resp. (8.2-11) zu verwenden.

Die Spannungswerte vor Auftreten des Fehlers sind definitionsgemäß symmetrisch; demzufolge lautet die auf symmetrische Komponenten transformierte Spannung U_{sj}^0 vor Auftreten des Fehlers

$$U_{sj}^0 = \begin{bmatrix} \bar{U}_{+j}^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_j^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n . \quad (8.6-1)$$

Die Leiterspannungen $\bar{U}_j^0$ vor Auftreten des Fehlers sind entweder durch eine Lastflußberechnung zu bestimmen oder aber in der bezogenen Darstellung gleich 1,0 zu setzen

$$U_{sj}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n . \quad (8.6-2)$$

In diesem Fall wird die Vorbelastung des Netzes nicht berücksichtigt.

Die Überlegungen in Abschnitt 8.5.5 basieren auf der Annahme, daß die Fehlerimpedanzmatrix Z_s^f existiert. Es ist in Abschnitt 8.5.6 gezeigt worden, daß dies für die hier untersuchten Fehler nicht der Fall ist, sondern nur die Admittanzmatrix Y_s^f existiert. Deshalb muß für die praktische Berechnung nun noch ein neuer Satz von Gleichungen hergeleitet werden, in dem Z_s^f durch Y_s^f ersetzt wird. Diese Herleitung wird erst an dieser Stelle gebracht, um die bisher immer wieder erwähnte Ähnlichkeit zwischen der symmetrischen und unsymmetrischen Fehlerstrom-Berechnung deutlich machen zu können. Die Substitution von Z_s^f durch Y_s^f geschieht dadurch, daß man den Fehlerstrom I_{si}^f durch die Fehlerspannung U_{si}^f im fehlerbehafteten Knoten i bei der Herleitung der Gl. (8.5-27) ersetzt. Dadurch ändert sich die bisherige Berechnungsart. Anstelle der bisher benutzten Gl. (8.5-27) erhält man nun

$$U_{si}^f = U_{si}^0 - Z_{sii} Y_s^f U_{si}^f . \quad (8.6-3)$$

Um daraus die unbekannte Fehlerspannung U_{si}^f berechnen zu können, wird folgende Umstellung vorgenommen

$$U_{si}^f (I + Z_{sii} Y_s^f) = U_{si}^0 . \quad (8.6-4)$$

Dabei bezeichnet I die Einheitsmatrix. Die gesuchte Fehlerspannung U_{si}^f beträgt

$$U_{si}^f = (I + Z_{sii} Y_s^f)^{-1} U_{si}^0 . \quad (8.6-5)$$

Der gesuchte Fehlerstrom I_{si}^f kann nun mit Gl. (8.5-21) unmittelbar angegeben werden

$$I_{si}^f = Y_s^f U_{si}^f = Y_s^f (I + Z_{sii} Y_s^f)^{-1} U_{si}^0 . \quad (8.6-6)$$

Die Spannungen U_{si}^f in den übrigen, nicht vom Fehler betroffenen Knoten $j = 1, 2, \dots, j \neq i, \dots, n$ erhält man durch Substitution von Gl. (8.6-6) in Gl. (8.5-25) für alle Knoten j

$$U_{sj}^f = U_{sj}^0 - Z_{sji} I_{si}^f = U_{sj}^0 - Z_{sji} (I + Z_{sii} Y_s^f)^{-1} U_{si}^0. \quad (8.6-7)$$

Mit Hilfe der Knotenspannungen U_{sj}^f können schließlich die Leitungsströme $I_{s,jk}^f$, die im Fehlerfall auf den Leitungen von Knoten j nach k fließen, berechnet werden, indem man dazu Gl. (8.5-32) verwendet.

Natürlich müssen auch bei dieser Berechnungsart die in symmetrischen Komponenten erhaltenen Größen zum Schluß auf physikalische Leitergrößen durch die inverse Transformation umgerechnet werden.

Aufgaben

Aufgabe 8.1

In einem unsymmetrisch betriebenen Drehstromsystem werden folgende Leiterströme gemessen

$$\bar{I}_a = 200/0^\circ \text{ A} \quad \bar{I}_b = 80/-150^\circ \text{ A} \quad \bar{I}_c = 100/20^\circ \text{ A}.$$

Gesucht sind die auf symmetrische Komponenten transformierten Mit-, Gegen- und Nullströme. Die analytische Rechnung ist mit der graphischen Lösung zu überprüfen.

Aufgabe 8.2

Man berechne das Produkt $T^T T^*$ der Transformationsmatrix T für symmetrische Komponenten, unter Beachtung der Eigenschaften des Drehoperators $\bar{a}$.

Aufgabe 8.3

Unter Verwendung der zyklischen Netzimpedanzmatrix Z in Gl. (8.2-1) ist mit Gl. (8.2-16) zu zeigen, daß die auf symmetrische Komponenten transformierte Netzimpedanzmatrix Z_s eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 8.4

Für das in Kapitel 7.5 benutzte, dreiknotige Netz ist der einpolige Erdkurzschlußstrom in Leiter a des Knotens 3 zu bestimmen. Dazu sind die bereits in Kapitel 7.5 verwendeten Daten für die Formulierung der Ersatzschaltung der Nullkomponente wie folgt zu ergänzen. Beide Generatorwicklungen haben einen starr geerdeten Sternpunkt; die bezogene Nullreaktanz der Generatoren ist $X_{01} = 0,05$ resp. $X_{02} = 0,025$. Die beiden Transformatoren haben die Schaltgruppe $Dy0$ mit sekundärseitig starr geerdetem Sternpunkt. Die Nullimpedanzen der drei Übertragungsleitungen werden einheitlich zu $\bar{Z}_0 = j 0,2$ vorgegeben. Für die Fehlerstromberechnung ist mit einer endlichen Fehlerimpedanz $\bar{Z}^f = 1/\bar{Y}^f$ zu rechnen. Für die numerische Auswertung kann jedoch $Y^f \rightarrow \infty$ gesetzt werden.

9 State Estimation

9.1 Einleitung

Bei allen bisherigen Überlegungen zur Berechnung des stationären, optimalen oder fehlerbehafteten Betriebszustandes eines elektrischen Energieübertragungssystems ist die Voraussetzung gemacht worden, daß sehr viele Systemvariablen durch eine geeignete Spezifikation festgelegt werden können. Dies mag im Hinblick auf planerische Aufgaben durchaus gerechtfertigt sein. Will man jedoch den Systemzustand für betriebliche Aufgaben bestimmen, so ist die Vorgehensweise der Variablenspezifikation nicht mehr zulässig. Vielmehr müssen möglichst genaue Informationen über die Systemgrößen bekannt sein, um eine für den aktuellen Betriebszustand relevante Berechnung durchführen zu können.

Zur Verdeutlichung dieses Problems wird die Lastflußberechnung herangezogen. Pro Knoten gibt es bekanntlich sechs Größen, von denen vor der Rechnung vier spezifiziert werden müssen. Es ist ganz offensichtlich, daß die Wahl der vier Größen das Resultat der Lastflußberechnung entscheidend bestimmt. Je weiter die spezifizierten Werte von den aktuellen Werten verschieden sind, um so weniger Aussagekraft haben die darauf aufbauenden Ergebnisse der Netzberechnung. Werden beispielsweise in einem $P-Q$ -Knoten die Wirk- und Blindeinspeisungen resp. Lasten nicht so gewählt, wie sie im aktuellen Betriebszustand auftreten, so wird man eine komplexe Knotenspannung erhalten, die von der im Netz tatsächlich auftretenden Spannung erheblich abweichen wird.

Das vorliegende Kapitel befaßt sich mit einer systematischen Vorgehensweise, um Meßwerte für die Bestimmung des Systemzustandes verwenden zu können. Da die Messungen selbst fehlerhaft sind, handelt es sich dabei um ein statistisches Problem; d. h. der Systemzustand kann nicht im algebraischen Sinn berechnet werden. Vielmehr wird er mit einem geeigneten, statistischen Schätzverfahren (State Estimation) als möglichst wahrscheinlicher Wert bestimmt. Dieser Aspekt muß besonders betont werden, um so zu verdeutlichen, daß es sich nicht um eine Modifikation der Lastflußberechnung handelt, sondern vielmehr um ein Verfahren, das als Bindeglied zwischen dem aktuellen Betriebszustand, wie er durch Messungen beschrieben werden kann, und den für die Netzführungsaufgaben erforderlichen Netzberechnungen anzusehen ist. Bild 9.1-1 zeigt diesen Zusammenhang in schematischer Form.

9.2 Aufgabenstellung

Bild 9.1-1 zeigt deutlich, daß vom Standpunkt der Betriebsführung zunächst die Möglichkeit offen steht, die im Netz durch Messungen gewonnenen Daten mit Hilfe eines Datenübertragungssystems zur Netzleitzentrale zu übertragen und dort entweder mit einem Übersichtsdiagramm oder über rechnergesteuerte Sichtgeräte dem Betriebspersonal anzuzeigen. Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, daß nur diejenigen Grö-

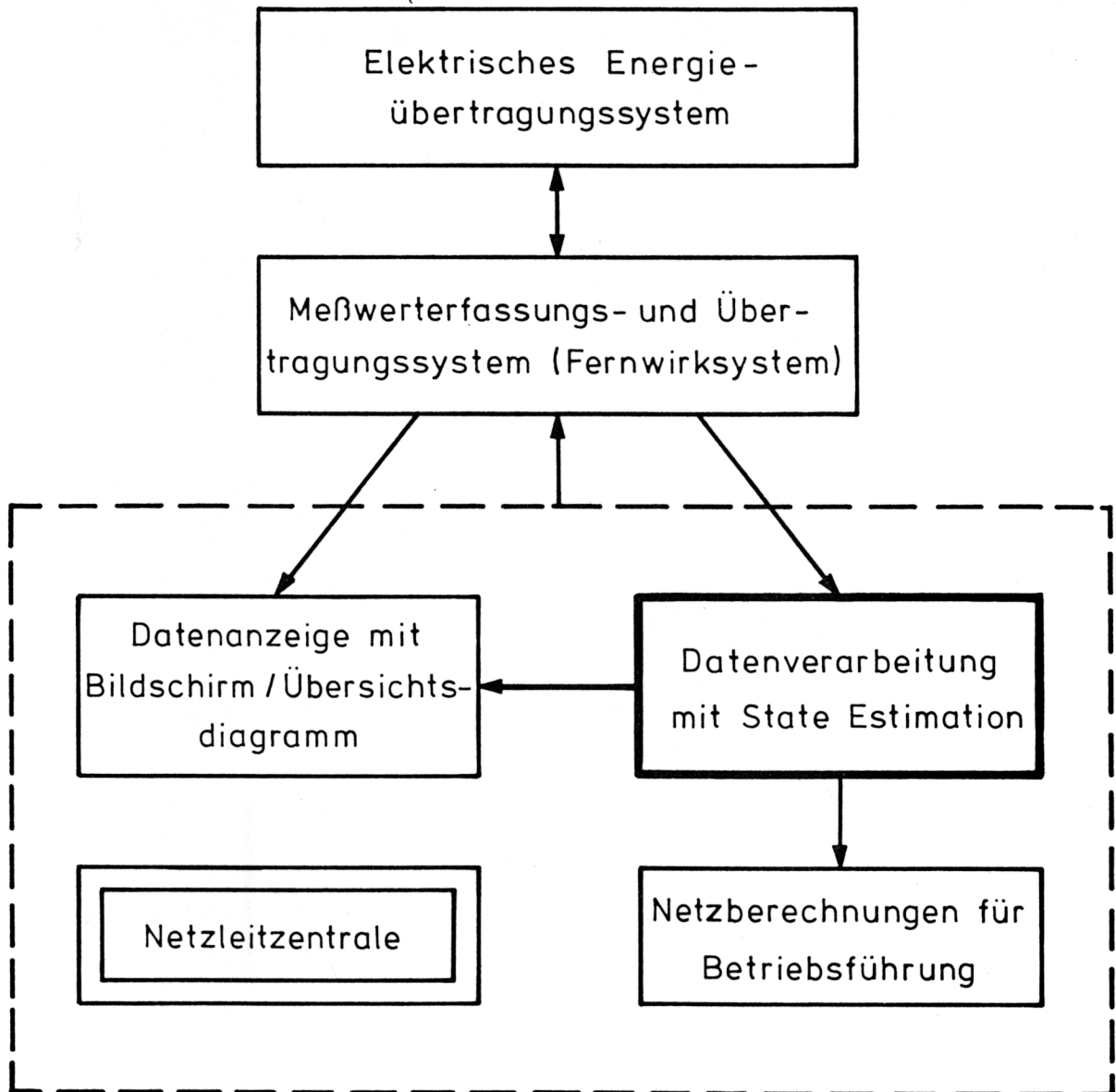


Bild 9.1-1 State Estimation als Bindeglied zwischen dem aktuellen Netzbetriebszustand, der durch Messungen beschrieben wird, und den für die Netzführung erforderlichen Netzberechnungen

Ben angezeigt werden, die gemessen worden sind. Ferner besteht ein zweiter Nachteil darin, daß im Fall fehlerhafter Messungen oder Datenübertragungsfehler keine Möglichkeit besteht, diese Tatsache feststellen zu können.

Um diese beiden schwerwiegenden Nachteile beheben zu können, ist die Methode der State Estimation oder Zustands-Abschätzung entwickelt worden. Bild 9.2-1 zeigt ein schematisches Blockdiagramm des Estimationsalgorithmus, d.h. eines digitalen Rechenverfahrens, das als Eingangsgrößen die im Netz erfaßten Messungen verwendet, um damit den Systemzustand bestimmen zu können. Dabei sind neben den sich zeitlich ändernden Meßwerten auch noch die Netztopologie und die das Netz beschreibenden Parameter als bekannte Größen bereitzustellen. Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, den Estimationsalgorithmus vorzustellen und seine Einsatzmöglichkeiten für die Netzbetriebsführung aufzuzeigen.

Für die sichere und zuverlässige Netzführung muß der Estimationsalgorithmus folgende Eigenschaften erfüllen:

- Der Netzzustand muß vollständig und zuverlässig bestimmt werden können.
- Die Meßfehler der Netzmessungen müssen statistisch ausgefiltert werden.

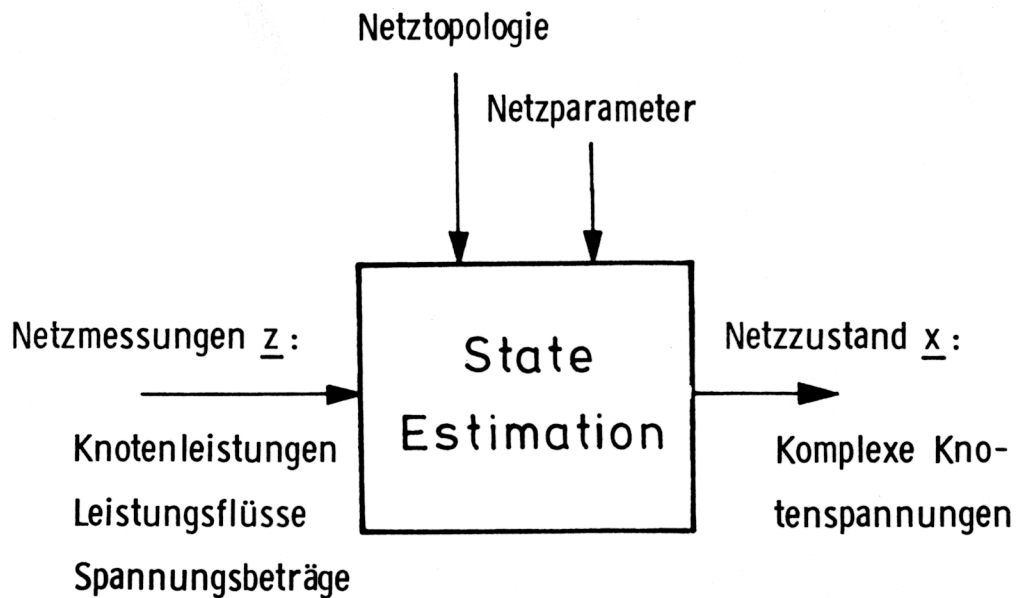


Bild 9.2-1 Vereinfachtes Blockdiagramm des State Estimators für die Netzführung

- Die nicht gemessenen Größen müssen mit den Ergebnissen des State Estimators berechnet werden können, um so alle Netzgrößen angeben zu können.
- Große Meßfehler müssen entdeckt, lokalisiert und eliminiert werden können.

Im Hinblick auf diese Forderungen erscheint anhand von Bild 9.1-1 eine mögliche Lösung des Estimationsproblems darin zu bestehen, daß alle im Netz auftretenden Größen gemessen und angezeigt werden. Dieser Vorgehensweise stehen zwei Hindernisse im Wege. Erstens, jede Messung ist mit einem statistisch verteilten Fehler behaftet. Wegen der endlichen Genauigkeit der Meßwandler ist der exakte Wert keiner Netzgröße bekannt. Zweitens, es gibt Netzgrößen, die mit vernünftigem, technischem Aufwand nicht meßbar und somit in der Netzleitzentrale nicht bekannt sind. Damit sieht man, daß eine direkte Vorgehensweise ohne State Estimation die oben aufgestellten Forderungen nicht erfüllt. Ferner folgt aus diesen Überlegungen bereits auch schon die Tatsache, daß die Verbindung zwischen Netzmessungen und Netzberechnungen auf statistischen Überlegungen beruhen muß, um eine praxisbezogene Lösung entwickeln zu können.

9.3 Lineare Estimationsmethode

9.3.1 Ein einfaches Beispiel

Um die Bedeutung der linearen Estimationsmethode aufzeigen zu können, soll das folgende, einfache Beispiel vorgestellt werden. Dabei ist zur Notation noch anzumerken, daß die wahren, aber in der Praxis unbekannten Werte ohne Index, die aktuellen Meßwerte mit dem hochgestellten Index „ m “ gekennzeichnet werden. Dadurch soll der Unterschied zwischen mathematisch exakten und physikalisch, fehlerbehafteten Größen deutlich gemacht werden.

Bild 9.3-1 zeigt ein einfaches Gleichstromnetzwerk, bestehend aus zwei Widerständen R_1 und R_2 sowie einer Gleichspannungsquelle mit der Spannung x . Gemessen wird der Strom I sowie der Spannungsabfall U_2 am Widerstand R_2 . Es wird vorausgesetzt,

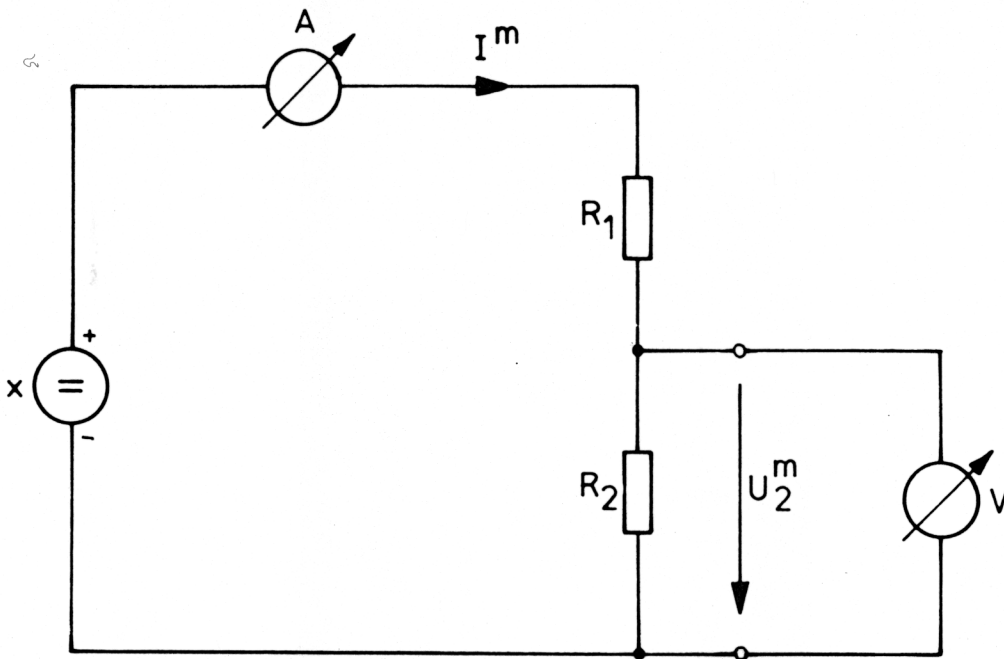


Bild 9.3-1 Gleichstromnetzwerk zur Einführung von State Estimation

daß die Widerstandswerte R_1 und R_2 bekannt sind. Mit Hilfe der beiden Messungen, die in Wirklichkeit fehlerbehaftet sind, soll nun die Quellenspannung x , die die Rolle der Zustandsgröße dieses Netzwerkes spielt, bestimmt werden.

Den bisherigen Ausführungen entsprechend kann nun die Information über den Zustand des Gleichstromnetzwerkes in Bild 9.3-1 auf folgende zwei Arten bestimmt werden. Erstens, man mißt nicht nur die zwei zunächst vorgegebenen Größen I^m und U_2^m , sondern auch die Quellenspannung x^m und den Spannungsabfall U_1^m über dem Widerstand R_1 . Da jede Messung fehlerbehaftet ist, erhält man auf diese Weise keinen konsistenten Datensatz; d. h. die mathematischen Zusammenhänge

$$x = U_1 + U_2 \quad U_1 = IR_1 \quad U_2 = IR_2 \quad (9.3-1)$$

werden von den physikalischen Meßgrößen U_1^m , U_2^m , I^m und x^m nicht erfüllt. Ist ferner z. B. der Meßwert U_1^m mit einem großen Meßfehler behaftet, so ist es aufgrund der drei Gleichungen (9.3-1) nicht möglich, festzustellen, welche Messung den großen Meßfehler enthält.

Die zweite Möglichkeit, den Systemzustand vollständig und zuverlässig zu bestimmen, besteht darin, mit Hilfe der State Estimation und den beiden vorgegebenen Messungen I^m und U_2^m eine Abschätzung $\hat{x}$ der Quellenspannung zu bestimmen und danach mit den Widerstandswerten R_1 und R_2 Abschätzungen der drei übrigen Systemgrößen $\hat{I}$, $\hat{U}_1$ und $\hat{U}_2$ zu bestimmen. Auf diese Weise gelingt es, trotz der Meßfehler einen konsistenten Datensatz über den Betriebszustand des Gleichstromnetzes zu bestimmen.

Die Abschätzung von $\hat{x}$ aufgrund der beiden Messungen I^m und U_2^m , die im folgenden mit $z_1^m = I^m$ und $z_2^m = U_2^m$ bezeichnet werden sollen, beruht auf der Methode der Fehler-Quadrate. Dazu wird im nächsten Abschnitt 9.3.2 zunächst ein lineares Modell zur Verknüpfung der Meßgrößen z_1^m und z_2^m mit der Zustandsgröße x aufgestellt. Man nennt dieses Modell ein Meßmodell. In Abschnitt 9.3.3 wird die Methode der kleinsten Fehler-Quadrate auf das lineare Meßmodell angewendet, um so eine Abschätzung $\hat{x}$ der Spannung bestimmen zu können. Es handelt sich dabei um lineare State Estimation.

9.3.2 Lineares Meßmodell

Der Zusammenhang zwischen der Zustandsgröße x und den wahren, aber unbekannten Werten z_1 und z_2 der beiden Messungen z_1^m und z_2^m läßt sich mit Bild 9.3-1 unmittelbar angeben. Da z_1 dem Strom I entspricht, gilt

$$z_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} x . \quad (9.3-2)$$

Andererseits entspricht die Messung z_2 dem Spannungsabfall U_2 über dem Widerstand R_2 , d. h.

$$z_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x . \quad (9.3-3)$$

Die mathematisch exakten Gln. (9.3-2) und (9.3-3) werden von den gegebenen Meßwerten z_1^m und z_2^m nicht exakt erfüllt. Deshalb müssen diese beiden Beziehungen um den Meßfehler v_1 resp. v_2 ergänzt werden. Physikalisch gilt somit

$$\begin{aligned} z_1^m &= z_1 + v_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} x + v_1 \\ z_2^m &= z_2 + v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x + v_2 . \end{aligned} \quad (9.3-4)$$

Die Meßfehler v_1 und v_2 sind statistische Größen, deren aktuelle Werte nicht bekannt sind. Deshalb muß mit Hilfe der Ausgleichsrechnung ein Schätzwert für $\hat{x}$ bestimmt werden, der die Gln. (9.3-2) und (9.3-3) im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate erfüllt.

Für die theoretischen Überlegungen zur State Estimation nimmt man an, daß die Meßfehler v_1 und v_2 durch eine Normalverteilung beschrieben werden können. Dabei wird der Erwartungswert gleich Null und die Varianz σ_1^2 resp. σ_2^2 entsprechend der Genauigkeit des Meßgerätes gewählt.

Bevor auf die lineare State Estimation (lineare Ausgleichsrechnung) eingegangen wird, werden die Meßmodellgleichungen (9.3-4) in Vektorform angegeben

$$z^m = Hx + v . \quad (9.3-5)$$

Dabei gelten im vorliegenden Beispiel folgende Definitionen

$$z^m = \begin{bmatrix} z_1^m \\ z_2^m \end{bmatrix} \quad H = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} . \quad (9.3-6)$$

Es ist noch anzumerken, daß in diesem Beispiel der Zustandsvektor x eine skalare Größe ist und deshalb die Meßmatrix H nur eine Spalte besitzt.

Für die weiteren Ausführungen wird auf die spezielle Kennzeichnung des Meßvektors z^m durch den hochgestellten Index „m“ verzichtet, da im folgenden stets nur die physikalischen Meßwerte und nicht die mathematisch exakten Werte benutzt werden.

9.3.3 Lineare Estimationstheorie

Für das einfache Netzwerk in Bild 9.3-1 wird mit Gl. (9.3-5) ein linearer Zusammenhang zwischen Zustandsgröße x und dem Meßvektor z angegeben. Allgemein lautet das lineare Meßmodell

$$z = Hx + v \quad (9.3-7)$$

Der Meßvektor z hat die Dimension m ; der Zustandsvektor x die Dimension n . Demzufolge hat die Meßmodellmatrix H die Dimension (m, n) . Der Vektor des Meßfehlers v hat die Dimension m .

Um die Methode der kleinsten Fehler-Quadrate (State Estimation) anwenden zu können, muß allgemein die Ungleichung

$$m \geq n \quad (9.3-8)$$

erfüllt sein. Mit anderen Worten muß das Verhältnis m/n , das als Redundanz η definiert ist

$$\eta = m/n \quad (9.3-9)$$

wegen der Ungleichung (9.3-8) stets größer als eins sein. Im Hinblick auf den Einsatz von State Estimation in Energieübertragungssystemen ist $\eta \approx 2$ zu wählen.

Die Abschätzung von x ist so zu bestimmen, daß die gewichtete Summe der quadrierten Meßfehler v minimal wird. Dabei wird die Gewichtung umgekehrt proportional zur Varianz σ_i^2 des Meßfehlers v_i gewählt. Somit lautet die Bestimmungsgleichung von $\hat{x}$

$$J(x) = (z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx) \stackrel{!}{=} \text{minimal} \quad (9.3-10)$$

Die Ausmultiplikation dieser Zielfunktion $J(x)$ ergibt

$$J(x) = z^T R^{-1} z + x^T H^T R^{-1} H x - x^T H^T R^{-1} z - z^T R^{-1} H x \quad (9.3-10a)$$

Die Gewichtung mit der Diagonalmatrix R^{-1} , die die Form

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_m^2 \end{bmatrix} \quad (9.3-11)$$

hat, bewirkt, daß genaue Messungen ein größeres Gewicht haben als ungenaue Messungen. Wenn man die Meßfehler v_i als statistische Zufallsgrößen interpretiert, so können die Gewichtungsfaktoren $1/\sigma_i^2$ als inverse Varianzen interpretiert werden. Je größer die Varianz σ_i^2 eines Meßfehlers v_i ist, um so größer sind die zu erwartenden Meßfehler. Deshalb führt die Gewichtung mit der Matrix R^{-1} gemäß Gl. (9.3-11) dazu, daß eine solche Messung bei der Bildung der Fehlersumme ein kleineres Gewicht erhält als eine genaue Messung mit entsprechend kleiner Varianz. Da R in Gl. (9.3-11) als Diagonalmatrix definiert wird, sind die Messungen z_i statistisch unabhängige Größen.

Die Optimalitätsbedingung der gewichteten Fehlerquadratsumme (9.3-10)

$$dJ(x)/dx \Big|_{x=\hat{x}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.3-12)$$

führt auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $\hat{x}$. Beachtet man, daß die Zielfunktion $J(x)$ eine Funktion der n Zustandsgröße $x_1, x_2, \dots, x_n$, die im Zustandsvektor x zusammengefaßt sind, ist, so sind als Optimalitätsbedingungen alle partiellen Ableitungen $\partial J/\partial x_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ zu bilden. Mit der Definition

$$\partial x/\partial x_i = i_i = [0 \quad 0 \quad 0 \dots 1 \dots 0 \quad 0]^T \quad (9.3-13)$$

für den i -ten Einheitsvektor i_i gilt von Gl. (9.3-10a) ausgehend

$$\partial J/\partial x_i = i_i^T H^T R^{-1} H x + x^T H^T R^{-1} H i_i - i_i^T H^T R^{-1} z - z^T H R^{-1} i_i. \quad (9.3-14)$$

Da aber die skalare Beziehung

$$(x^T H^T R^{-1} H i_i)^T = i_i^T H^T R^{-1} H x = x^T H^T R^{-1} H i_i \quad (9.3-15)$$

einerseits und die Vektorbeziehung

$$z^T H R^{-1} i_i = i_i^T H^T R^{-1} z \quad (9.3-16)$$

gilt, erhält man für die gesuchten partiellen Ableitungen

$$\partial J/\partial x_i = 2 i_i^T (H^T R^{-1} H x - H^T R^{-1} z). \quad (9.3-17)$$

Die Optimalitätsbedingung (9.3-10) kann für alle $i = 1, 2, \dots, n$ nur durch die Beziehung

$$H^T R^{-1} H \hat{x} = H^T R^{-1} z \quad (9.3-18)$$

erfüllt werden. Dieses Gleichungssystem (9.3-18) zur Bestimmung des Zustandsvektors $\hat{x}$ bezeichnet man als die GAUSSschen, gewichteten Normalgleichungen. Die Lösung $\hat{x}$ ist derjenige Schätzwert von x , der zur kleinsten, gewichteten Fehlersumme $J(x)$ gemäß Gl. (9.3-10) führt. Sie beruht auf der Lösung des linearen Gleichungssystems (9.3-18), das wie folgt geschrieben wird

$$G \hat{x} = d. \quad (9.3-19)$$

Die Estimationsmatrix G ist durch

$$G = H^T R^{-1} H, \quad (9.3-20)$$

d. h. durch die (n, n) dimensionale, gewichtete Normalmatrix gegeben. Der Vektor d in Gl. (9.3-19) ist durch

$$d = H^T R^{-1} z \quad (9.3-21)$$

gegeben. Er hat die Dimension n . Numerisch effiziente Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (9.3-19) sind in Kapitel 1 beschrieben worden.

Sobald der Systemzustand x durch die Abschätzung $\hat{x}$ bestimmt worden ist, lassen sich die Messungen z aufgrund des linearen Modelles (9.3-7) ebenfalls abschätzen, indem gilt

$$\hat{z} = H\hat{x} . \quad (9.3-22)$$

Die Differenz

$$\Delta x = x - \hat{x} \quad (9.3-23)$$

bezeichnet man als Schätzfehler; die Differenz zwischen der aktuellen Messung und den geschätzten Meßwerten, d. h.

$$r = z - \hat{z} \quad (9.3-24)$$

als den Residuenvektor r . Aus der Definition (9.3-10) folgt, daß der Wert von $J(\hat{x})$ durch die Summe der quadrierten Residuen gegeben ist.

9.3.4 Anwendung der linearen Estimationstheorie

Die allgemeine, lineare Estimationstheorie soll nun auf das in Abschnitt 9.3.1 vorgestellte, einfache Beispiel angewendet werden. Wählt man die Gewichtungsmatrix R^{-1} als Einheitsmatrix I , so ist die Summe der Fehlerquadrate durch

$$J(x) = \left(z_1 - \frac{1}{R_1 + R_2} x \right)^2 + \left(z_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} x \right)^2 \quad (9.3-25)$$

gegeben. Die Optimalitätsbedingung (9.3-10) lautet

$$dJ/dx = 0 = -2 \left(z_1 - \frac{1}{R_1 + R_2} x \right) \frac{1}{R_1 + R_2} - 2 \left(z_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} x \right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} . \quad (9.3-26)$$

Die Auflösung nach der zu bestimmenden Zustandsgröße x , die die Quellenspannung beschreibt, ergibt

$$\hat{x} = \frac{R_1 + R_2}{1 + R_2^2} (z_1 + R_2 z_2) . \quad (9.3-27)$$

Die Interpretation dieses Ergebnisses lautet: der Schätzwert $\hat{x}$ entspricht demjenigen Wert der Quellenspannung x , der sich am besten an die beiden Meßwerte z_1 und z_2 anpaßt. Bei der Bestimmung der Quellenspannung nach Gl. (9.3-27) wurde angenommen, daß die Genauigkeit der beiden Messungen gleich groß ist.

9.4 Anwendung in Energieübertragungssystemen

9.4.1 Definition der Systemgrößen

Es ist zweckmäßig, zunächst einige grundsätzliche Überlegungen zum Einsatz von State Estimation in Energieübertragungssystemen anzustellen. Bezüglich des Systemverhaltens lassen sich zwei Betriebszustände unterscheiden, und zwar der transiente und der stationäre Zustand. Ein transienter Zustand liegt immer dann vor, wenn Schaltmaßnahmen oder größere Störungen aufgetreten sind. Die Zeitkonstante für transiente Vorgänge im Netz liegt zwischen 0,1 und 5 Sekunden bei Schaltmaßnahmen und zwischen 2 Sekunden und 5 Minuten nach dem Ausfall eines Kraftwerkes als Beispiel einer großen Störung. Im stationären Zustand besteht ein Gleichgewicht zwischen erzeugter und abgenommener Leistung. Für den stationären Betriebszustand können Zeitbereiche von einigen Sekunden bis zu Minuten angesetzt werden. Ferner wird für alle weiteren Überlegungen angenommen, daß ein symmetrischer Betriebszustand vorliegt. State Estimation wird für die Überwachung eines Systems eingesetzt, das sich im stationären Betriebszustand befindet. Während transienten Ausgleichsvorgängen kann State Estimation nicht eingesetzt werden.

Die Netzstruktur, d. h. die Netztopologie, muß bekannt sein. Sie ist durch die in Betrieb stehenden Übertragungsmittel wie Hochspannungsleitungen, Kabel und Transformatoren usw. gegeben. Die Parameterwerte der eingesetzten Betriebsmittel werden als bekannt vorausgesetzt. Sie beinhalten z. B. die Leitungsparameter, die Übersetzungsverhältnisse der Transformatoren sowie die Genauigkeit der verwendeten Meßwert-erfassungssysteme.

Die zunächst unbekannten, mit State Estimation zu bestimmenden Systemzustandsgrößen sind die komplexen Spannungen $\bar{U}_i$ in allen Netzknoten. Da der Spannungswinkel δ_1 im Referenzknoten 1 gleich Null gesetzt wird, besteht der Zustandsvektor x aus $2n - 1$ unabhängigen Variablen, wobei n die Anzahl der Netzknoten angibt. Der Zustandsvektor x wird in kartesischen Koordinaten definiert.

$$x^T = [f_2 f_3 \cdots f_n e_1 e_2 \cdots e_n] \quad (9.4-1)$$

Der Zusammenhang mit den Spannungsbeträgen U_i und den Spannungswinkeln δ_i ist durch

$$U_i = (e_i^2 + f_i^2)^{1/2} \quad \text{und} \quad \delta_i = \arctan(f_i/e_i) \quad (9.4-2)$$

gegeben. Im Referenzknoten 1 ist der Spannungswinkel gleich Null und somit erscheint die Variable f_1 nicht im Zustandsvektor x .

Die im Netz durchführbaren Messungen zur Bestimmung von x mit State Estimation sind

- Wirk- und Blindleistungsbilanzen P_i und Q_i im Netzknoten i als Differenz zwischen der Einspeisung P_{Gi} resp. Q_{Gi} und der Last P_{Li} resp. Q_{Li}
- Wirk- und Blindleistungsflüsse P_{ik} und Q_{ik} auf dem die Netzknoten i und k verbindenden Übertragungselement
- Betrag der Spannung U_i im Netzknoten i .

Allgemein hat der m -dimensionale Meßvektor z folgenden Aufbau

$$z = \begin{bmatrix} \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ P_{ik} \\ \vdots \\ Q_{ik} \\ \vdots \\ U_i \end{bmatrix} \quad (9.4-3)$$

Es ist darauf hinzuweisen, daß Gl. (9.4-3) nur die allgemeine Struktur des Meßvektors z angibt. Welche Größen im Netz tatsächlich gemessen und im State Estimator für die Abschätzung des Zustandsvektors x verwendet werden, hängt von betrieblichen Gesichtspunkten ab. Um die in Abschnitt 9.3.3 erwähnte Redundanzforderung $\eta > 1$ gewährleisten zu können, muß hier die Forderung

$$\eta = \frac{m}{2n-1} > 1 \quad (9.4-4)$$

erfüllt sein. In der Praxis wird $\eta \approx 2$ gewählt; d. h. es werden etwa doppelt so viele Messungen, wie Unbekannte zu bestimmen sind, verwendet. Allgemein gesprochen sollte z etwa 20% Bilanzmessungen, 75% Leistungsflußmessungen und 5% Spannungsbetragsmessungen enthalten. Für die weiteren Überlegungen wird immer vorausgesetzt, daß die Wirk- und Blindleistungen stets paarweise gemessen und im State Estimator verwendet werden.

Der Meßfehler v bildet alle Störeinflüsse nach, die in folgende drei Kategorien eingeteilt werden können:

- Instrumentenfehler: Meß- und Übertragungsfehler des Fernmeßsystems, Codier- und A/D Umwandlungsfehler, unvollständige Meßwerterfassung
- Betriebsunsicherheiten: Verzögerung der Meßwerterfassung wegen serieller Datenübertragung
- Unvollständigkeit des Modelles: Die Ersatzschaltbilder für Leitungen und Transformatoren sind ungenau; die Parameter der Übertragungselemente sind nicht genau bekannt.

Offensichtlich könnte man die Fehlereinflüsse der ersten Kategorie dadurch reduzieren, daß bessere Meß- und Übertragungseinrichtungen installiert werden. Die damit verbundenen Kosten setzen diesem Vorgehen jedoch rasch Grenzen. Die Betriebsunsicherheiten lassen sich nicht vermeiden, da es nicht wirtschaftlich ist, für jeden Meßwert eine eigene Übertragungseinrichtung zu installieren. Die genaue Kenntnis der Modellparameter ist nicht sehr entscheidend (mit Ausnahme des Übersetzungsverhältnisses von Transformatoren), muß aber bei der Überlegung für die Bestimmung des Fehlers mitberücksichtigt werden.

Zusammenfassend ist festzuhalten, daß die Meßfehler v_i statistische Größen sind, die einer Vielzahl von Ursachen entstammen. Der Erwartungswert der Meßfehler v_i ist gleich Null. Ihre Varianzen σ_i^2 geben die Fehlergröße an und werden bei der Gewich-

tung der Fehlerquadrate berücksichtigt. Die einzelnen Meßfehler v_i sind zahlenmäßig nicht bekannt, da es sich um Zufallsgrößen handelt. Sie werden im m -dimensionalen Vektor

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \quad v_2 \cdots v_m] \quad (9.4-5)$$

zusammengefaßt.

9.4.2 Modell des Übertragungselementes

Nachdem bereits im vorigen Abschnitt angegeben worden ist, welche Größen als Messungen z für die Bestimmung des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ vorhanden sind, muß nun der Zusammenhang zwischen komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$, die den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ definieren, und den möglichen Messungen z aufgestellt werden. Aus dieser Zielsetzung heraus wird es klar, daß es zweckmäßig ist, Beziehungen zwischen dem Ersatzschaltbild eines einzelnen Übertragungselementes und den entsprechenden Knotenspannungen aufzustellen. Mit anderen Worten ist die in den Kapiteln 3 und 4 oft benutzte globale Netzdarstellung mit Hilfe der Knotenadmittanzmatrix $\mathbf{Y}_k$ für die Lösung der hier anstehenden Aufgabe nicht geeignet. Vielmehr wird jedes Übertragungselement gemäß Bild 9.4-1 durch ein π -Ersatzschaltbild in der Admittanzschreibweise dargestellt. Für die Strom-Spannungs-Beziehung gilt für jedes einzelne Übertragungselement zwischen den Knoten i und j

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{ij} \\ \bar{I}_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{ii} & \bar{y}_{ij} \\ \bar{y}_{ji} & \bar{y}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{i-j} \begin{bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{bmatrix}. \quad (9.4-6)$$

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß die komplexen Elemente $\bar{y}_{ii}$, $\bar{y}_{ij}$, $\bar{y}_{ji}$ und $\bar{y}_{jj}$ der Vierpolmatrix $\mathbf{Y}_{i-j}$ in Gl. (9.4-6) mit den Elementen der in Kapitel 2 definierten Knotenadmittanzmatrix $\mathbf{Y}_k$ nicht identisch sind. Vielmehr handelt es sich bei Gl. (9.4-6)

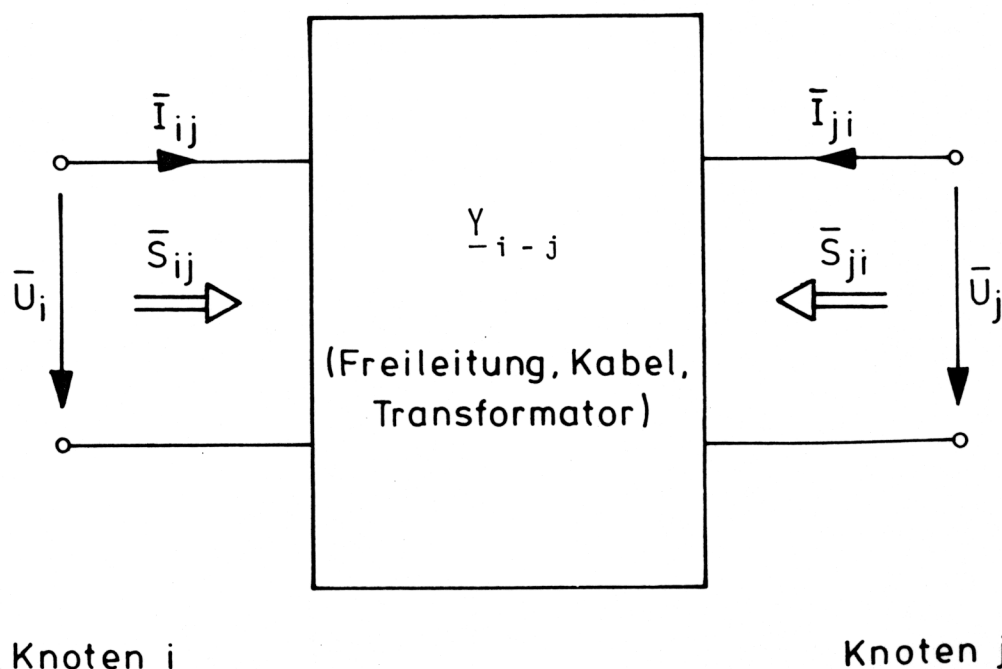


Bild 9.4-1 Admittanzdarstellung eines beliebigen Übertragungselementes zwischen Knoten i und Knoten j

um die Admittanzdarstellung eines Übertragungselementes zwischen Knoten i und j . Zur Verdeutlichung der Notation ist anzumerken, daß die hochgestellten Indizes i und j der Diagonalelemente $\bar{Y}_{ii}^i$ und $\bar{Y}_{jj}^j$ angeben, daß damit die Verbindung von i nach j resp. von j nach i dargestellt wird.

Handelt es sich beim Übertragungselement um eine Freileitung oder ein Kabel, so wird für die Bestimmung der Admittanzelemente das in Kapitel 2, Tabelle 2-1 gezeigte π -Ersatzschaltbild verwendet. Die Matrixelemente nehmen dabei folgende Werte an. Für die Diagonalelemente gilt definitionsgemäß

$$\bar{y}_{ii}^i = \bar{y}_{jj}^j = \frac{1}{\bar{Z}_{ii}} + j \frac{\omega C}{2} = \frac{1}{R + jX} + j \frac{\omega C}{2} . \quad (9.4-7)$$

Für die beiden Elemente $\bar{y}_{ij}$ und $\bar{y}_{ji}$ erhält man ebenfalls definitionsgemäß

$$\bar{y}_{ij} = \bar{y}_{ji} = -\frac{1}{\bar{Z}_{ii}} = -\frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2} . \quad (9.4-8)$$

Für die Darstellung der Transformatoren ist entsprechend vorzugehen.

Die komplexen Admittanzelemente von Gl. (9.4-6) werden für die weiteren Überlegungen in Real- und Imaginärteil zerlegt. Somit gilt z. B. für die Elemente $\bar{y}_{ii}^i$ und $\bar{y}_{ij}$

$$\bar{y}_{ii}^i = g_{ii}^i + j b_{ii}^i \quad \text{und} \quad \bar{y}_{ij} = g_{ij} + j b_{ij} . \quad (9.4-9)$$

Zu beachten ist die Vorzeichenkonvention zwischen den Gln. (9.4-7) bis (9.4-9). Der hochgestellte Index „ j “ des Elementes $\bar{y}_{ii}^i$ gibt an, daß es sich um eine Verbindung zwischen den Knoten i und j handelt.

Die Elemente der Vierpolmatrix Y_{i-j} in Gl. (9.4-6) werden nach den gleichen Regeln bestimmt, wie sie für den Aufbau der Knotenadmittanzmatrix Y_k in Kapitel 2 benutzt worden sind. Während Y_k ein Netz mit n Knoten bezüglich des Strom-Spannungs-Zusammenhanges vollständig beschreibt, wird die Vierpolmatrix Y_{i-j} für die Modellierung eines Übertragungselementes benutzt, um so auch einzelne Leistungsflüsse $P_{ij} + j Q_{ij}$ als Messungen verwenden zu können. Mit der hier gewählten Darstellung können Parallel-Leitungen nicht ohne weiteres behandelt werden; d. h. das Modell muß dazu erweitert werden.

9.4.3 Meßmodell

Nachdem im vorangehenden Abschnitt mit der Gl. (9.4-6) jedes einzelne Übertragungselement beschrieben worden ist, muß nun der Zusammenhang zwischen dem in Gl. (9.4-1) definierten Zustandsvektor x und den in Gl. (9.4-3) aufgeführten Messungen des Vektors z hergeleitet werden. Wegen des nichtlinearen Zusammenhanges zwischen den Knotenspannungen einerseits und den Leistungen andererseits kann dabei kein lineares Meßmodell gemäß Gl. (9.3-7) erwartet werden. Vielmehr wird für die weiteren Überlegungen von einem nichtlinearen Meßmodell der Form

$$z = h(x) + v \quad (9.4-10)$$

auszugehen sein. Im folgenden ist zu zeigen, welche Form die nichtlineare Funktion $h(x)$ für die drei möglichen Messungen Leistungsbilanzen, Leistungsflüsse und Spannungsbeträge hat.

Zunächst wird der Zusammenhang der Gl. (9.4-10) für die Leistungsflußmessung $\bar{S}_{ij} = P_{ij} + j Q_{ij}$ aufgestellt. Die vom Knoten i nach j fließende Wirk- und Blindleistung P_{ij} resp. Q_{ij} berechnet sich entsprechend Bild 9.4-1

$$P_{ij} = \operatorname{Re} \{ \bar{U}_i \bar{I}_{ij}^* \} \quad \text{und} \quad Q_{ij} = \operatorname{Im} \{ \bar{U}_i \bar{I}_{ij}^* \} . \quad (9.4-11)$$

Die Ausmultiplikation von Gl. (9.4-11) ergibt unter Beachtung von Gln. (9.4-6) bis (9.4-9) sowie der Definitionen (9.4-1) und (9.4-2) für den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ mit den komplexen Knotenspannungen $\bar{U}_i$ in kartesischen Koordinaten $e_i + j f_i$

$$P_{ij} = (e_i^2 + f_i^2) g_{ii}^1 + (e_i e_j + f_i f_j) g_{ij} - (e_i f_j - e_j f_i) b_{ij} \quad (9.4-12)$$

$$Q_{ij} = -(e_i^2 + f_i^2) b_{ii}^1 - (e_i f_j - e_j f_i) g_{ij} - (e_i e_j + f_i f_j) b_{ij} . \quad (9.4-13)$$

Die Wirk- und Blindbilanzen P_i resp. Q_i in den Netzknoten i sind gleich der Summe über alle Leistungsflüsse P_{ij} resp. Q_{ij} in Knoten i , d. h.

$$P_i = \sum_j P_{ij} \quad \text{und} \quad Q_i = \sum_j Q_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, j \neq i, \dots, n . \quad (9.4-14)$$

Dabei ist bei der Summenbildung zu beachten, daß die Summanden P_{ij} resp. Q_{ij} gleich Null sind, wenn zwischen den Knoten i und j keine Verbindung besteht. Damit erhält man für den Zusammenhang zwischen Knotenleistungen P_i resp. Q_i und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$

$$P_i = (e_i^2 + f_i^2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{ii}^1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{ (e_i e_j + f_i f_j) g_{ij} - (e_i f_j - e_j f_i) b_{ij} \} \quad (9.4-15)$$

$$Q_i = -(e_i^2 + f_i^2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ii}^1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{ (e_i f_j - e_j f_i) g_{ij} - (e_i e_j + f_i f_j) b_{ij} \} . \quad (9.4-16)$$

Diese beiden Gln. (9.4-15) und (9.4-16) gehen in Gl. (2.4-20) resp. (2.4-21) über, wenn die Eigenschaft $g_{ii} = \sum_{j \neq i} g_{ii}^1$ resp. $b_{ii} = \sum_{j \neq i} b_{ii}^1$ verwendet wird.

Für den Spannungsbetrag in Knoten i gilt schließlich

$$U_i = (e_i^2 + f_i^2)^{1/2} . \quad (9.4-17)$$

Damit ist das nichtlineare Meßmodell vollständig spezifiziert. Handelt es sich bei der Messung z_k um einen Wirk- oder Blindleistungsfluß, so ist der nichtlineare Zusammenhang $h_k(\mathbf{x})$ durch Gl. (9.4-12) und (9.4-13) gegeben. Ist die Messung z_k eine Wirk- resp. Blindbilanzmessung, so ist der entsprechende Zusammenhang $h_k(\mathbf{x})$ durch Gl. (9.4-15) resp. (9.4-16) gegeben. Wird schließlich eine Spannungsbetragsmessung verwendet, ist der nichtlineare Zusammenhang $h_k(\mathbf{x})$ durch Gl. (9.4-17) gegeben.

9.4.4 Linearisierung des Estimationsalgorithmus

Im Unterschied zu den Ausführungen in Abschnitt 9.3 liegen nun im Falle der Anwendung von State Estimation auf Drehstromsysteme keine linearen Zusammenhänge zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ vor, so daß nun das Fehlerkriterium (9.3-10) lautet

$$J(x) = (z - h(x))^T R^{-1} (z - h(x)) . \quad (9.4-18)$$

Die Diagonalmatrix R^{-1} enthält wiederum die Gewichtung der einzelnen Messungen entsprechend ihrer Genauigkeit.

Das zu lösende Estimationsproblem besteht nun in der Bestimmung des Minimums der Fehlerfunktion (9.4-18), die eine skalare Funktion mit $2n-1$ Variablen ist. Die Optimalitätsbedingung lautet nun

$$dJ/dx|_{x=\hat{x}} = g(\hat{x}) = -2H^T(\hat{x})R^{-1}(z - h(\hat{x})) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (9.4-19)$$

Dabei ist $H(x)$ die JACOBISCHE Matrix der Netzgleichungen $h(x)$ entsprechend der Definition

$$H(x) = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial x_1 & \cdots & \partial h_1/\partial x_{2n-1} \\ \vdots & & \\ \partial h_m/\partial x_1 & \cdots & \partial h_m/\partial x_{2n-1} \end{bmatrix} . \quad (9.4-20)$$

Die Elemente der JACOBISCHEN Matrix H , die definitionsgemäß eine $(m, 2n-1)$ -dimensionale Matrix ist, sind durch die Netzgleichungen (9.4-12) bis (9.4-17) sowie die Struktur des Zustandsvektors x und des Meßvektors z gegeben. Die JACOBISCHE Matrix H hat folgende Struktur

$$H(x) = \begin{bmatrix} H_1 = \partial P_i/\partial f_j & H_2 = \partial P_i/\partial e_j \\ H_3 = \partial Q_i/\partial f_j & H_4 = \partial Q_i/\partial e_j \\ H_5 = \partial P_{ij}/\partial f_j & H_6 = \partial P_{ij}/\partial e_j \\ H_7 = \partial Q_{ij}/\partial f_j & H_8 = \partial Q_{ij}/\partial e_j \\ H_9 = \partial U_i/\partial f_j & H_{10} = \partial U_i/\partial e_j \end{bmatrix} . \quad (9.4-21)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_1 lauten

$$\partial P_i/\partial f_i = 2 f_i g_{ii} + \sum_{j \neq i} (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad \text{mit} \quad \sum_{j \neq i} g_{ij}^1 = g_{ii} \quad (9.4-22)$$

$$\partial P_i/\partial f_j = f_i g_{ij} - e_i b_{ij} . \quad (9.4-23)$$

Die Summenbildung in Gl. (9.4-22) und den nun noch folgenden Ausdrücken erstreckt sich jeweils über alle $j = 1, 2, \dots, 2n-1$. Lediglich der Wert $j = i$ ist bei der Summierung wegzulassen.

Die Elemente der Teilmatrix H_2 sind klein im Vergleich zu denen von H_1 , da $f_j \ll e_j$ und $b_{ij} > g_{ij}$ ist. Sie lauten

$$\partial P_i/\partial e_i = 2 e_i g_{ii} + \sum_{j \neq i} (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad (9.4-24)$$

$$\partial P_i/\partial e_j = e_i g_{ij} + f_i b_{ij} . \quad (9.4-25)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_3 sind aus den bereits genannten Gründen ebenfalls klein

$$\partial Q_i / \partial f_i = -2 f_i b_{ii} + \sum_{j \neq i} (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad \text{mit} \quad \sum_{j \neq i} b_{ii}^i = b_{ii} \quad (9.4-26)$$

$$\partial Q_i / \partial f_j = -(e_i g_{ij} + f_i b_{ij}) . \quad (9.4-27)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_4 lauten

$$\partial Q_i / \partial e_i = -2 e_i b_{ii} - \sum_{j \neq i} (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad (9.4-28)$$

$$\partial Q_i / \partial e_j = f_i g_{ij} + e_i b_{ij} . \quad (9.4-29)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_5 lauten

$$\partial P_{ij} / \partial f_i = 2 f_i g_{ii}^i + (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad (9.4-30)$$

$$\partial P_{ij} / \partial f_j = f_i g_{ij} - e_i b_{ij} . \quad (9.4-31)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_6 sind im Vergleich zu denen in H_5 klein. Sie lauten

$$\partial P_{ij} / \partial e_i = 2 e_i g_{ii}^i + (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad (9.4-32)$$

$$\partial P_{ij} / \partial e_j = e_i g_{ij} + f_i b_{ij} . \quad (9.4-33)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_7 sind im Vergleich zu denen in H_8 klein. Sie lauten

$$\partial Q_{ij} / \partial f_i = -2 f_i b_{ii}^i + (e_j g_{ij} - f_j b_{ij}) \quad (9.4-34)$$

$$\partial Q_{ij} / \partial f_j = -(e_i g_{ij} + f_i b_{ij}) . \quad (9.4-35)$$

Die Elemente der Teilmatrix H_8 lauten

$$\partial Q_{ij} / \partial e_i = -2 e_i b_{ii}^i - (f_j g_{ij} + e_j b_{ij}) \quad (9.4-36)$$

$$\partial Q_{ij} / \partial e_j = f_i g_{ij} - e_i b_{ij} . \quad (9.4-37)$$

Die Teilmatrizen H_9 und H_{10} sind Diagonalmatrizen, deren Elemente wie folgt lauten

$$\partial U_i / \partial f_i = f_i / (e_i^2 + f_i^2)^{1/2} \quad (9.4-38)$$

$$\partial U_i / \partial e_i = e_i / (e_i^2 + f_i^2)^{1/2} . \quad (9.4-39)$$

Nachdem nun sowohl die nichtlinearen Meßgleichungen $h(x)$ als auch die JACOBIsche Matrix H definiert worden sind, kann nun die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (9.4-19) in Angriff genommen werden. Eine Möglichkeit, dieses nichtlineare System zu lösen, ist der Iterationsansatz

$$G^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = H^T(x^{(k)}) R^{-1}(z - h(x^{(k)})) . \quad (9.4-40)$$

Dabei ist k der Iterationszähler mit $k = 0, 1, 2, \dots$ und somit bezeichnet $x^{(k)}$ den Wert von x in der k -ten Iteration. Den Startwert $x^{(0)}$ wählt man zweckmäßigerweise so, daß

alle bezogenen Spannungsbeträge gleich eins und alle Winkel gleich Null sind. Die Estimationsmatrix $G^{(k)}$ ist noch zu bestimmen. Falls der Iterationsansatz (9.4-40) zur Erfüllung der Optimalitätsbedingung (9.4-19) führt, muß gelten

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} = \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad (9.4-41)$$

und zwar unabhängig vom Wert der Estimationsmatrix G , vorausgesetzt, daß die Matrix G den vollen Rang besitzt. Im Zusammenhang mit Gl. (9.4-19) erheben sich somit zwei Probleme:

- Wahl der Estimationsmatrix G so, daß ein möglichst schnelles Konvergenzverhalten festgestellt wird.
- Wahl eines numerisch effizienten Verfahrens, um das linearisierte Gleichungssystem

$$Gd = b$$

$$\text{mit} \quad (9.4-42)$$

$$d = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \quad \text{und} \quad b = H^T(\mathbf{x}^{(k)}) R^{-1} (z - h(\mathbf{x}^{(k)}))$$

mit minimalem Rechenaufwand lösen zu können.

Die Estimationsmatrix G kann wie folgt bestimmt werden. Die Linearisierung der Netzgleichungen $h(\hat{\mathbf{x}})$ mit Hilfe einer TAYLOR-Reihen-Entwicklung um den momentanen Iterationswert $\mathbf{x}^{(k)}$ ergibt

$$h(\hat{\mathbf{x}}) \simeq h(\mathbf{x}^{(k)}) + H(\mathbf{x}^{(k)}) (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}) \quad . \quad (9.4-43)$$

Setzt man Gl. (9.4-43) in Gl. (9.4-19) ein und nimmt man an, daß $H(\mathbf{x}^{(k)}) = H(\mathbf{x})$ gesetzt werden kann, so gilt

$$H^T(\mathbf{x}^{(k)}) R^{-1} H(\mathbf{x}^{(k)}) (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)}) = H^T(\mathbf{x}^{(k)}) R^{-1} (z - h(\mathbf{x}^{(k)})) \quad . \quad (9.4-44)$$

Der Vergleich von Gl. (9.4-44) mit Gl. (9.4-40) ergibt für die Estimationsmatrix $G^{(k)}$

$$G^{(k)} = H^T(\mathbf{x}^{(k)}) R^{-1} H(\mathbf{x}^{(k)}) \quad . \quad (9.4-45)$$

Das linearisierte Gleichungssystem (9.4-42) wird mit den in Kapitel 1 behandelten Verfahren iterativ gelöst, bis die Konvergenzbedingungen

$$|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}| < \varepsilon_x \quad \text{oder} \quad |\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}| < \varepsilon_z \quad (9.4-46)$$

erfüllt sind. Dabei werden die Konvergenzschranken ε_x und ε_z im voraus gewählt. Der geschätzte Meßvektor $\hat{\mathbf{z}}$ kann mit dem geschätzten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ durch Einsetzen in die Netzgleichungen entsprechend

$$\hat{\mathbf{z}} = h(\hat{\mathbf{x}}) \quad (9.4-47)$$

bestimmt werden.

9.5 Entdeckung und Lokalisierung großer Meßfehler

9.5.1 Bedeutung großer Meßfehler

In den bisherigen Überlegungen wurde angenommen, daß der Meßfehler v_i der i -ten Messung den Mittelwert Null und die Varianz σ_i^2 hat. Wie in der Einleitung bereits erwähnt, besteht die Aufgabe des Estimators nicht nur darin, die Fehlereinflüsse von v_i möglichst gut auszufiltern. Eine zweite, wichtige Aufgabe befaßt sich mit der Entdeckung und Lokalisierung großer Meßfehler. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie nicht mit der Varianz σ_i^2 bezüglich ihres statistischen Schwankungsbereiches dargestellt werden können. Vielmehr addiert man zum Fehler v_i noch einen den großen Meßfehler beschreibenden Wert b . Somit gilt für den Fehler allgemein

$$v' = v + b . \quad (9.5-1)$$

Wenn z. B. in der i -ten Messung ein großer Meßfehler auftritt, setzt man für die weiteren Überlegungen

$$b = i_i a , \quad (9.5-2)$$

wobei alle Elemente des Einheitsvektors i_i mit Ausnahme des i -ten Elementes, das gleich eins ist, gleich Null sind. Der Wert a gibt die Größe des großen Meßfehlers an. Die nun vom Estimator zu lösende Aufgabe besteht darin festzustellen, ob ein Meßwert z_i durch einen großen Meßfehler verfälscht wird. Falls dies der Fall ist, muß festgestellt werden, um welchen Meßwert es sich handelt, damit er in der Estimationsrechnung weggelassen werden kann.

Die technische Ursache für große Meßfehler kann bei einem schadhafte Meßwandler liegen. Nach der Installation neuer Fernmeßsysteme können große Meßfehler oft auch durch falsche Installationen verursacht werden. Schließlich können große Meßfehler auch vereinzelt durch Übertragungsfehler verursacht werden.

Die folgenden Ausführungen dienen als erste Einführung in die Behandlung großer Meßfehler, wobei allerdings die erforderlichen Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie als bekannt vorausgesetzt werden. Wegen der großen Bedeutung von State Estimation für die Entdeckung großer Meßfehler wird auf die Darstellung dieser Thematik jedoch nicht verzichtet.

9.5.2 Linearisierte Estimationstheorie

Die linearisierte Estimationsmethode beruht auf der Minimierung der Fehlerfunktion (9.4-18), die hier noch einmal angegeben wird

$$J(\hat{x}) = (z - h(\hat{x}))^T R^{-1} (z - h(\hat{x})) = \sum_{i=1}^m (r_i^2 / \sigma_i^2) . \quad (9.5-3)$$

Dabei bezeichnet das Residuum r_i die Differenz

$$r_i = z_i - h_i(\hat{x}) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, m . \quad (9.5-4)$$

Der mit State Estimation zu bestimmende Schätzwert $\hat{x}$ erfüllt die Bedingung (9.4-19), die in der Form

$$H^T R^{-1} [h(x) + v' - h(\hat{x})] = 0 \quad (9.5-5)$$

angegeben wird. Definiert man nun den Estimationsfehler Δx als

$$\Delta x = x - \hat{x} , \quad (9.5-6)$$

so gilt für die linearisierte Estimationstheorie, daß Δx klein ist und die Approximation

$$h(x) \simeq h(\hat{x}) + H \Delta x \quad (9.5-7)$$

zulässig ist. Daraus folgt für den Schätzfehler Δx , nachdem die Approximation (9.5-7) in Gl. (9.5-5) eingesetzt worden ist,

$$H^T R^{-1} [h(\hat{x}) + H \Delta x + v' - h(\hat{x})] = 0 . \quad (9.5-8)$$

Die Auflösung nach Δx ergibt

$$\Delta x = -\Sigma_x H^T R^{-1} v' , \quad (9.5-9)$$

wobei die Matrix Σ_x durch

$$\Sigma_x = (H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (9.5-10)$$

gegeben ist. Es ist die Inverse zu der in Gl. (9.4-45) definierten Estimationsmatrix G .

Für den geschätzten Residuenvektor r , der durch

$$r = z - \hat{z} = h(x) + v' - h(\hat{x}) \simeq h(\hat{x}) + H \Delta x + v' - h(\hat{x}) \quad (9.5-11)$$

definiert ist, erhält man nach Verwendung von Gl. (9.5-9)

$$r = (I - H \Sigma_x H^T R^{-1}) v' = W v' . \quad (9.5-12)$$

Dabei bezeichnet I die Einheitsmatrix. Man nennt die Matrix W , definiert als

$$W = I - H \Sigma_x H^T R^{-1} , \quad (9.5-13)$$

die Residuen-Sensitivitätsmatrix bezüglich des Meßfehlers v' .

9.5.3 Entdeckung großer Meßfehler

Für die Entdeckung großer Meßfehler in v wird die quadrierte Fehlersumme $J(\hat{x})$ verwendet. Setzt man Gl. (9.5-12) in (9.5-3) ein, so gilt

$$J(\hat{x}) = v'^T R^{-1} W v' , \quad (9.5-14)$$

wenn die Identität

$$WR^{-1}W = R^{-1}W \quad (9.5-15)$$

verwendet wird. Falls nun die statistischen Verteilungen der einzelnen Meßfehler v_i durch Normalverteilungen beschrieben werden, so hat die Größe $J(\hat{x})$ eine χ^2 -Verteilung, deren Freiheitsgrad durch die Differenz

$$K = m - (2n - 1) \quad (9.5-16)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet m die Anzahl der Messungen und $(2n - 1)$ die Anzahl der durch State Estimation zu schätzenden Komponenten des Zustandsvektors x . Falls $k > 30$ ist, geht die χ^2 -Verteilung von $J(\hat{x})$ in eine Normalverteilung über, deren Erwartungswert K und deren Varianz $2K$ ist. Die standardisierte Zufallsgröße

$$\zeta = \frac{J(\hat{x}) - K}{\sqrt{2K}} \quad (9.5-17)$$

kann somit als Testgröße wie folgt verwendet werden. Wenn sich herausstellt, daß $\zeta < 1.96$ ist, so kann mit 95% Wahrscheinlichkeit angenommen werden, daß der Meßvektor z keine schlechten Meßwerte enthält. Anderenfalls muß durch eine weitere Untersuchung lokalisiert werden, in welcher Messung z_i der große Meßfehler auftritt.

9.5.4 Lokalisierung großer Meßfehler

Wenn aufgrund des $J(\hat{x})$ -Testes nicht angenommen werden kann, daß keine großen Meßfehler vorhanden sind, müssen die normierten Residuen $\hat{r}_N$ berechnet werden. Unter Verwendung der Normierungsmatrix

$$\Sigma_r = WR \quad (9.5-18)$$

bildet man die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag } \Sigma_r \quad (9.5-19)$$

und damit die normierten Residuen

$$r_N = \sqrt{D^{-1}} \hat{r} \quad (9.5-20)$$

Nachdem man die Elemente des normierten Residuenvektors r_N der Größe nach sortiert hat, gibt die größte Komponente von r_N durch den Index i gemäß der Beziehung

$$r_{N,i}^{\max} = \max(r_N) \quad (9.5-21)$$

an, welche Messung z_i den großen Meßfehler enthält. Dieser Meßwert ist aus dem Meßvektor z zu eliminieren und danach die Estimationsrechnung erneut durchzuführen. Zur Kontrolle ist noch einmal der $J(x)$ -Test anzuwenden, dessen Ergebnis dann angibt, daß der bereinigte Meßvektor keine großen Meßfehler mehr enthält und demzufolge der Schätzwert $\hat{x}$ des Zustandsvektors x für die weiteren Berechnungen zuverlässig und vollständig ist. Bild 9.5-1 zeigt in schematischer Form den gesamten Aufbau der State Estimation für den Einsatz in elektrischen Energieübertragungssystemen.

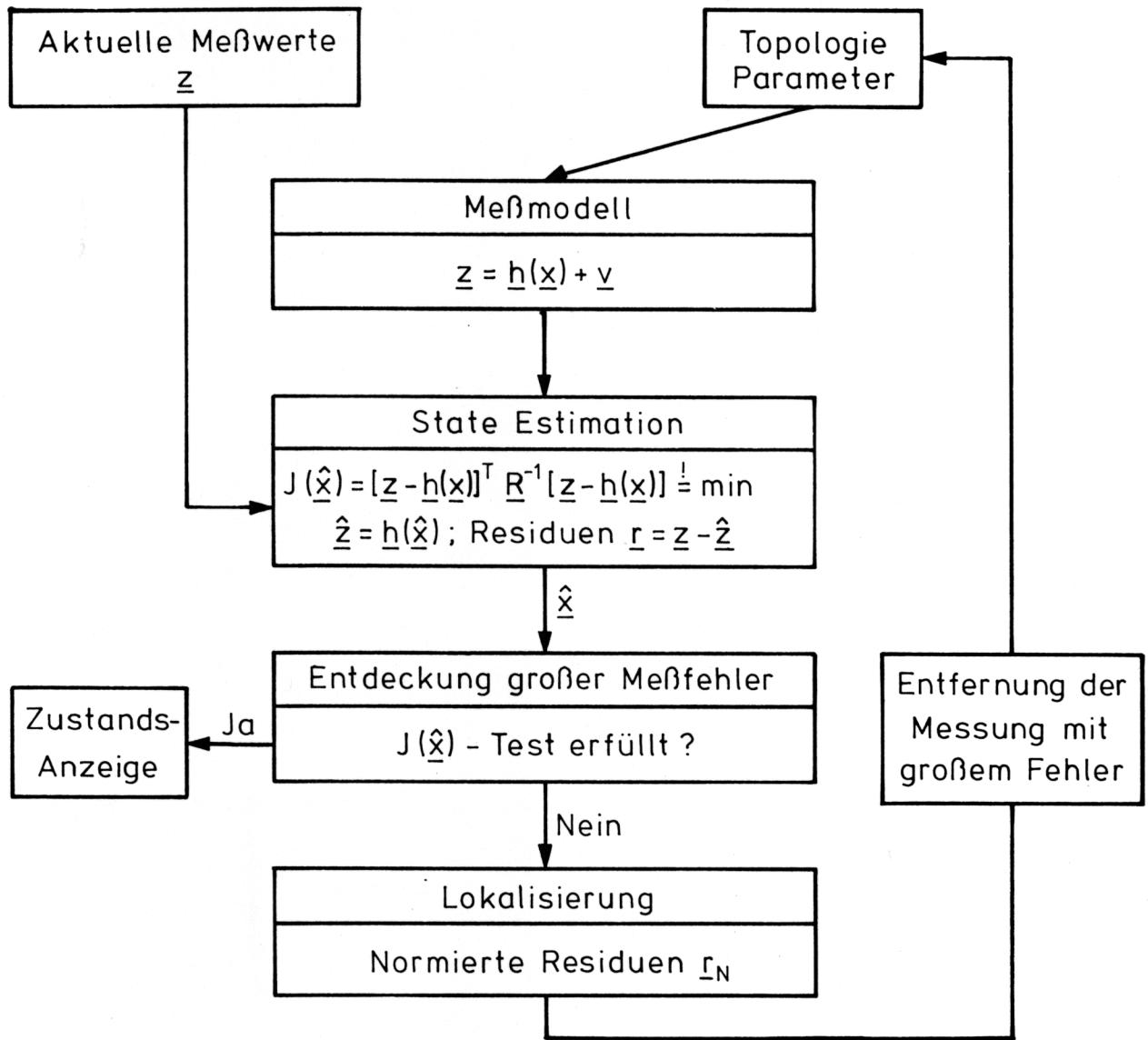


Bild 9.5-1 Schematisches Blockdiagramm für State Estimation zur Ausfilterung der Meßfehler sowie zur Entdeckung und Lokalisierung großer Meßfehler

9.6 Abschließende Bemerkungen

Im Hinblick auf eine numerisch effiziente Gestaltung des Estimationsalgorithmus sind folgende Vereinfachungen zulässig. Die Estimationsmatrix $\underline{G}$ wird nur mit dem Startvektor $\underline{x}^{(0)}$ einmal zu Beginn der Iteration berechnet und dann in allen weiteren Iterationsschritten konstant gehalten. Eine weitere Verringerung der Rechenzeit wird dadurch erreicht, daß die unterschiedlichen, numerischen Werte der JACOBISCHEN Matrix $\underline{H}$ zu einer Entkopplung des Estimationsalgorithmus benutzt werden. Damit erhält man eine zur entkoppelten Lastflußberechnung entsprechende, numerisch sehr effiziente Estimationsmethode, die für den on-line Einsatz im Rahmen der Netzbetriebsaufgaben gut geeignet ist.

Aufgaben

Aufgabe 9.1

In dem in Bild 9.3-1 gezeigten Gleichstromnetzwerk soll die Gleichspannung x mit den beiden Messungen $z_1 = 4,9 \text{ A}$ und $z_2 = 10,5 \text{ V}$ mit State Estimation geschätzt werden. Die Widerstandswerte sind $R_1 = 1 \text{ Ohm}$ und $R_2 = 2 \text{ Ohm}$.

- Wie groß ist die Gleichspannung $\hat{x}$, falls die beiden Messungen mit gleicher Genauigkeit durchgeführt werden; d. h. $\sigma_1^2 = (1 \text{ A})^2$ und $\sigma_2^2 = (1 \text{ V})^2$?
- Wie groß sind die geschätzten Meßgrößen $\hat{z}_1$ und $\hat{z}_2$? Ferner ist der Wert der gewichteten Fehlerquadratsumme $J(\hat{x})$ zu bestimmen.
- Wie verändern sich die Ergebnisse von a), wenn die Strommessung ungenau und die Spannungsmessung relativ genau durchgeführt wird; d. h. $\sigma_1^2 = (1 \text{ A})^2$ und $\sigma_2^2 = (0,1 \text{ V})^2$?

Aufgabe 9.2

Wie lauten die Elemente der Vierpolmatrix Y_{i-j} , wenn es sich beim Übertragungselement zwischen den Knoten i und j um einen Transformator handelt

- mit bezogenem Nennübersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 1$
- mit bezogenem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} \neq 1$?

Aufgabe 9.3

In dem in Bild Ü9.3-1 gezeigten, einfachen Energieübertragungssystem mit zwei Knoten werden folgende Messungen durchgeführt

$$\begin{aligned} z_1 = P_{12} &= 155 \text{ MW} & \text{mit } \sigma_1^2 &= (1 \text{ MW})^2 \\ z_2 = Q_{12} &= 22 \text{ MVar} & \text{mit } \sigma_2^2 &= (1 \text{ MVar})^2 \\ z_3 = U_2 &= 210 \text{ kV} & \text{mit } \sigma_3^2 &= (1 \text{ kV})^2. \end{aligned}$$

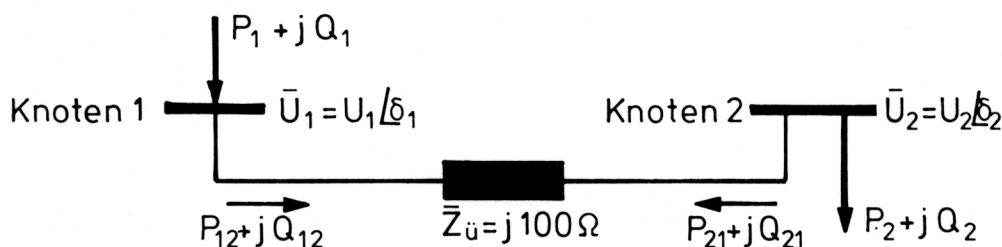


Bild Ü9.3-1 Zweiknotiges Netz

Gesucht ist ein Schätzwert für die komplexe Spannung $\bar{U}_2$ in Knoten 2 mit State Estimation, wenn zu den drei obigen Messungen zusätzlich angenommen wird, daß die Spannung im Referenzknoten 1 betragsmäßig durch den exakten Wert $U_1 = 220 \text{ kV}$ und den exakten Winkel $\delta_1 = 0^\circ$ bekannt ist.

Gesucht sind ferner die geschätzten Leistungsflüsse $\hat{P}_{12} + j \hat{Q}_{12}$ resp. $\hat{P}_{21} + j \hat{Q}_{21}$.