technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A)

Schreiben Sie für $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ die komplexen Zahlen z, $(\overline{z})^{-1}$ und $\overline{z^2}$ in der Form $x + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie $|z|$.

Präsenzaufgabe B)

Schreiben Sie für $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}$ und $w = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ die komplexen Zahlen $z + w$ und $(z+w)^2$ in der Form $x + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie $|z \cdot w|$.

Präsenzaufgabe C)

Schreiben Sie für $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$ die komplexen Zahlen $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$ und $z \cdot (1+3\mathrm{i}) \cdot (2+\mathrm{i})$ in der Form $x + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie $|z^2|$.

Aufgabe 17) (Teilfolgen) (1+2+1=4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Sind die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1}$, so ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(b) Seien die drei Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{5k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ist dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(c) Seien die drei Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ist dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 18) (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$) (3+1=4 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ eine Abbildung. Konstruieren Sie induktiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n \subset [0,1]$, mit der Eigenschaft, dass $f(n) \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie damit, dass die Abbildung f nicht surjektiv ist.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

bitte wenden

Aufgabe 19) **((Un-)Gleichungen mit komplexen Zahlen)** (2+2=4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right| \geq 1$ und skizzieren Sie das Ergebnis in der Ebene.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{(i)} \quad |z| - 2z = \mathrm{i} \qquad \text{(ii)} \quad |z| = \mathrm{Re}(z) - |\mathrm{Im}(z)|$$

Abgabe bis Montag, den 20. November 2017, um 14 Uhr in die Übungskästen.