technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 13) (Grenzwerte und Häufungspunkte) (4×1=4 Punkte)

Bestimmen Sie für die nachstehenden reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bzw. die Häufungspunkte:

(i) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n \cdot n^2}{2+3n+n^2}$ (ii) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ (iii) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$

(iv) $a_n = (-1)^n \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Aufgabe 14) (Rekursion) (4 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 15) (Arithmetische Mittel) (2+1+1=4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der arithmetischen Mittel

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Hinweis: Man zerlege den Summationsbereich der Summe für b_n geeignet in zwei Teile.

(b) Für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $a_{n+1} - b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kc_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $b \in \mathbb{R}$ und ist $(nc_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b.

Aufgabe 16) (Charakterisierung von Häufungspunkten) (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ enthält die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ unendlich viele Elemente.

Tipp: Eine Möglichkeit besteht darin, die Implikationen (i)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i) zu zeigen.

Abgabe bis Montag, den 13. November 2017, um 14 Uhr in die Übungskästen.