Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A)

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gleichmächtig sind.

Präsenzaufgabe B)

Zeigen Sie, dass die Intervalle $(0,1)$ und $(-1,3)$ gleichmächtig sind.

Präsenzaufgabe C)

Zeigen Sie, dass die Intervalle $(0,1)$ und $(0,\infty)$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 10) (Abbildungen in die Potenzmenge) (4 Punkte)

Sei A eine beliebige, nicht leere Menge. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \text{ ist Teilmenge von } A\},$$

die sogenannte *Potenzmenge* von A. Sei ferner $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv sein kann.

Hinweis: Man betrachte die Menge $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$.

Aufgabe 11) (Folgen und Grenzwerte) (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass $(n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Folgern Sie daraus, dass auch $(n^k \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge ist.

Hinweis: Man studiere den Beweis, dass $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, und beachte den Binomialsatz.

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{2 - n + 3n^2}{4 + 7n^2} \qquad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - 3^n}$$

bitte wenden

Aufgabe 12) (Konvergente Folgen) (1+1+2=4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist mit Grenzwert $\sqrt{a}$.

(c) Sei $a > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Hinweis: Fallunterscheidung nach $a \geq 1$ und $a < 1$.