

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgabe A)

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^n \geq n^2$.

Präsenzaufgabe B)

Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\prod_{k=0}^n (1 + a^{(2^k)}) = \frac{1 - a^{(2^{n+1})}}{1 - a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Präsenzaufgabe C)

Zeigen Sie $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7) (Induktion) (2+2=4 Punkte)

(a) Gegeben sei $p_n := \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Berechnen Sie p_n für $n = 2, 3, \dots$ bis Sie ein Bildungsgesetz erkennen/vermuten, und beweisen Sie dies durch Induktion.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n \in \mathbb{N}$ durch die folgende Rekursionsformel gegeben:

$$a_0 := a_1 := 1, \quad a_n := 6a_{n-2} - a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte reelle Zahlen c_1, c_2 gibt mit

$$a_n = c_1 \cdot 2^{n+2} + c_2 \cdot (-3)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimmen Sie c_1 und c_2 .

Aufgabe 8) (Ungleichungen I) (1+1+2=4 Punkte)

(a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $k! > 2^k$? (Induktionsbeweis)

(b) Zeigen Sie (direkt): $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

(c) Zeigen Sie: $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Binomialsatz, Teile (a), (b) und die geometrische Summenformel.

Aufgabe 9) (Ungleichungen II) (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die jeweilige Ungleichung erfüllen:

$$(i) \quad \frac{2}{x^2 - 16} < \frac{1}{64} \quad (ii) \quad \frac{|x-1|}{|x+1|} \geq 1 \quad (iii) \quad \frac{1 - |x-2|}{|x-3|} < \frac{1}{2}$$