Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Präsenzaufgaben)

Untersuchen Sie, ob die angegebene Menge nach oben bzw. unten beschränkt ist und bestimmen Sie (mit Beweis) gegebenenfalls Supremum bzw. Infimum:

- A) $A := \{(-1)^n + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 B) $B := \{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 C) $C := \{1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 4) (Endliche Summen) (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie ohne Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1 - 3^{-n}}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Tipp: Multiplizieren Sie die Summe mit $2 = 3 - 1$ und vereinfachen Sie.

(b) Berechnen Sie den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Tipp: Bringen Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ in die Form $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$ und vereinfachen Sie.

Aufgabe 5) (Supremum und Infimum) (4×1=4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere, nach oben beschränkte Menge. Zeigen Sie:

(a) Jede nicht leere Teilmenge $N \subset M$ ist nach oben beschränkt mit $\sup N \leq \sup M$.

(b) Die Menge $-M := \{-m \mid m \in M\} \subset \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt mit

$$\inf(-M) = -\sup M.$$

(c) Gilt $\sup M < 0$, so ist die Menge $M^{-1} := \{m^{-1} \mid m \in M\}$ nach unten beschränkt mit

$$\inf(M^{-1}) = (\sup M)^{-1}.$$

(d) Ist $N \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit $N \cap M \neq \emptyset$, so ist $N \cap M$ nach oben beschränkt mit

$$\sup(N \cap M) \leq \min\{\sup N, \sup M\}.$$

Kann man hierbei „ $\leq$ “ durch „ $=$ “ ersetzen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

bitte wenden

Aufgabe 6) (Induktion) (4 Punkte)

Jemand behauptet, für $n \in \mathbb{N}$ sei die Aussage $(A_n): \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 + 2$ richtig und argumentiert wie folgt mit Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2n+1) \stackrel{(A_n)}{=} (n^2 + 2) + (2n+1) = (n+1)^2 + 2.$$

- (a) Was ist an der Argumentation richtig, was ist falsch?
- (b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^n (2k-1)$ für $n \in \mathbb{N}$ direkt unter Verwendung der als richtig bekannten Aussage $(B_n): \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (c) Wie könnte man ohne Verwendung von (B_n) vorgehen? (Beschreibung genügt)