Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis I

im Wintersemester 2017/18

Abgabe der Aufgaben 1–3 bis Montag, den 16. Oktober 2017, 14 Uhr in die Übungskästen.

Test der Präsenzaufgaben in den Übungen der zweiten Vorlesungswoche (16.-20. Oktober 2017).

Präsenzaufgabe A)

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig mit $z \neq 0$. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{yz^3 + xz}{z} - x$$

so weit wie möglich. Begründen Sie dabei jeden Ihrer Schritte mit den passenden Körperaxiomen.

Präsenzaufgabe B)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig mit $c \neq 0$. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{abc}{c(bc^{-1} + 1) - b}$$

so weit wie möglich. Begründen Sie dabei jeden Ihrer Schritte mit den passenden Körperaxiomen.

Präsenzaufgabe C)

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ beliebig mit $p \neq 0 \neq q$ und $p^2 + q^2 = 1$. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{p}{q} + \frac{q}{p}}$$

so weit wie möglich. Begründen Sie dabei jeden Ihrer Schritte mit den passenden Körperaxiomen.

Aufgabe 1) (Körperaxiome) (4×1=4 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $x, y \in \mathbb{K}$ beliebig. Leiten Sie die folgenden Aussagen aus den Körperaxiomen unter Zuhilfenahme eines Lemmas aus der Vorlesung her:

(a) $-(-x) = x$.

(b) $-x = (-1) \cdot x$.

(c) $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

(d) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

bitte wenden

Aufgabe 2) (Abbildungen) (2+1+1=4 Punkte)

Über der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, \quad & f(n) = n + 1\,, \\ g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, \quad & g(n) = n - 1\,, \\ h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, \quad & h(n) = -n\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(g(n)) = g(f(n))$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Gilt $f(h(n)) = h(f(n))$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$?

(c) Gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(h(n)) = h(f(n))$?

Aufgabe 3) (Parabeln) (2+2=4 Punkte)

Wir betrachten die Parabel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 3\,.$$

(a) Schreiben Sie f in Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - c)^2 + b$ mit geeigneten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Gibt es Schnitt- bzw. Berührpunkte von f mit der Geraden $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = 2x + 1$? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls rechnerisch.

Abgabe bis Montag, den 16. Oktober 2017, um 14 Uhr in die Übungskästen.