Vorlesung zu Kapitel 08:[1]

# Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

# Das Wichtigste aus Kapitel 7

- implizites Differenzieren
- Approximation
- Differential
- Elastizität $\quad El = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

8.1 Intuition

8.2 Definitionen

8.3 Allgemeine Eigenschaften

8.4 Tests der ersten Ableitung

8.5 Tests der zweiten Ableitung

8.6 Wendestellen

# 8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang




Höhle
engl:
Cave

konkav:
engl.
concave

# 8.1 Intuition: Seilbrücke über Bach



# 8.2 Definition Konvexkombination

$0{,}2 \cdot 5 + 0{,}8 \cdot 15 = \frac{2}{10} \cdot 5 + \frac{8}{10} \cdot 15$
$= \frac{10}{10} + \frac{120}{10} = 13$ ✓

Lambda

Für zwei beliebige Zahlen $x_1$ und $x_2$ ist für $\lambda$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$x(\lambda) = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$$

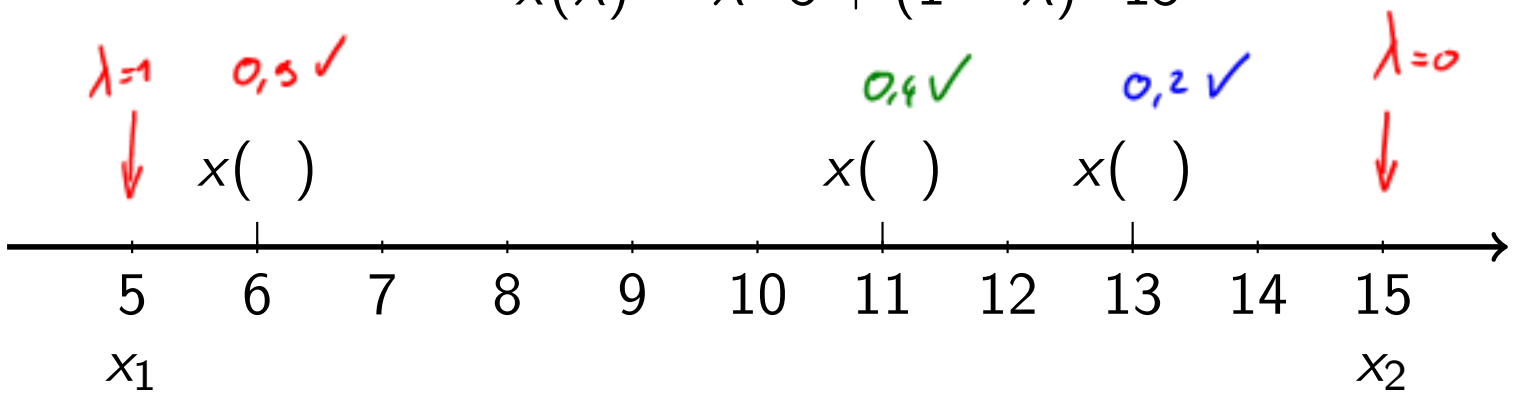
$11 = \lambda \cdot 5 + (1-\lambda) \cdot 15$

$\Leftrightarrow 11 = \lambda \cdot 5 + 15 - \lambda 15$
$\Leftrightarrow 11 = -10\lambda + 15$
$\Leftrightarrow -4 = -10\lambda$
$\Leftrightarrow \frac{-4}{-10} = 0{,}4 = \lambda$

eine **Konvexkombination** von $x_1$ und $x_2$.

Beispiel:

$$x(\lambda) = \lambda \cdot 5 + (1 - \lambda) \cdot 15$$




$6 = \lambda \cdot 5 + (1-\lambda) \cdot 15$

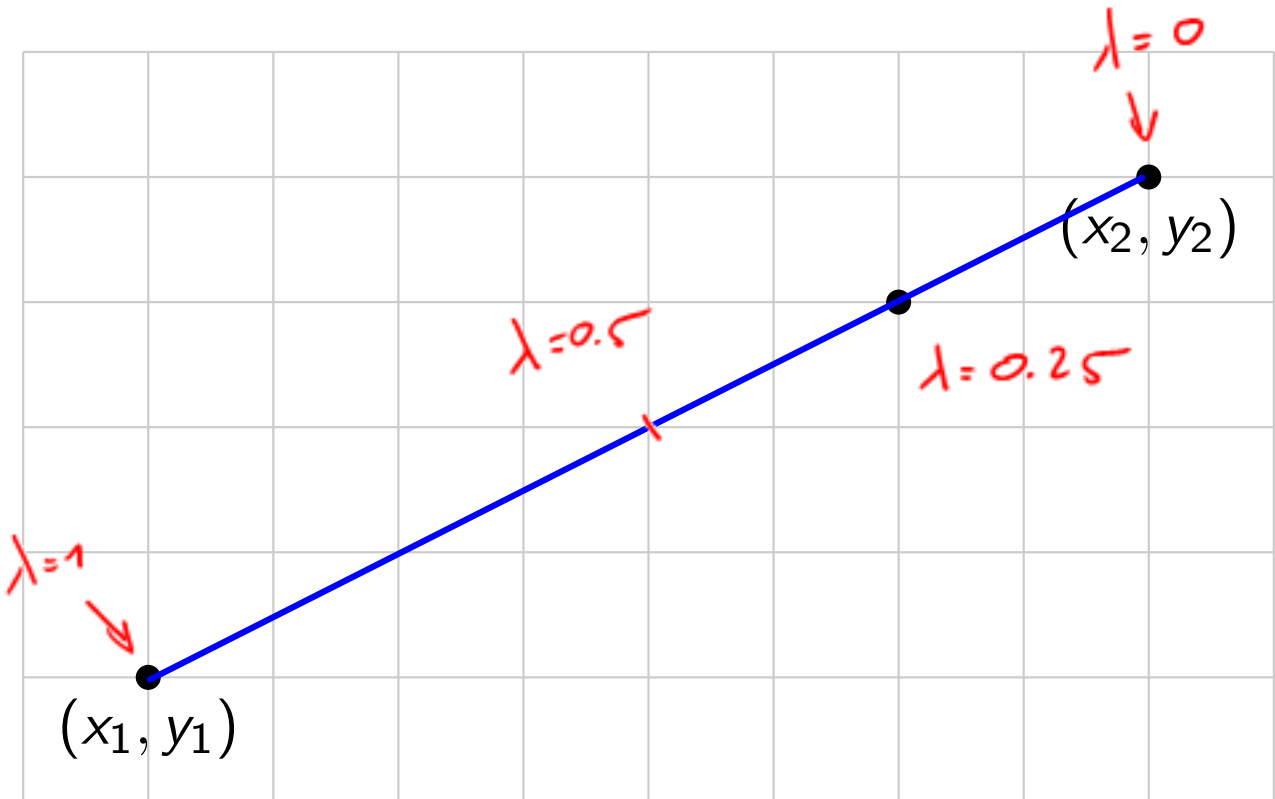
$\Leftrightarrow 6 = -10\lambda + 15 \Leftrightarrow -9 = -10\lambda \Leftrightarrow 0{,}9 = \lambda$

# Konvexkombinationen von Punkten

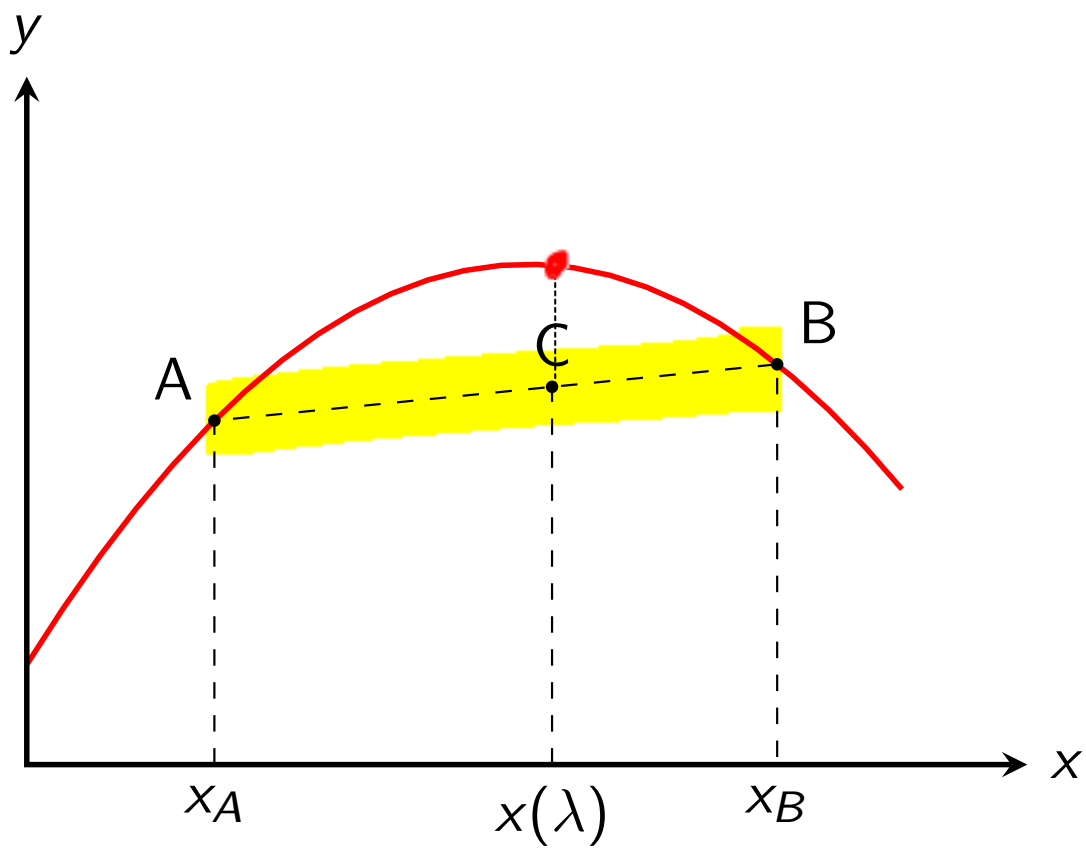
Für zwei beliebige Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ ist für $\lambda$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(x(\lambda), y(\lambda)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2)$$

eine Konvexkombinationen dieser beiden Punkte.

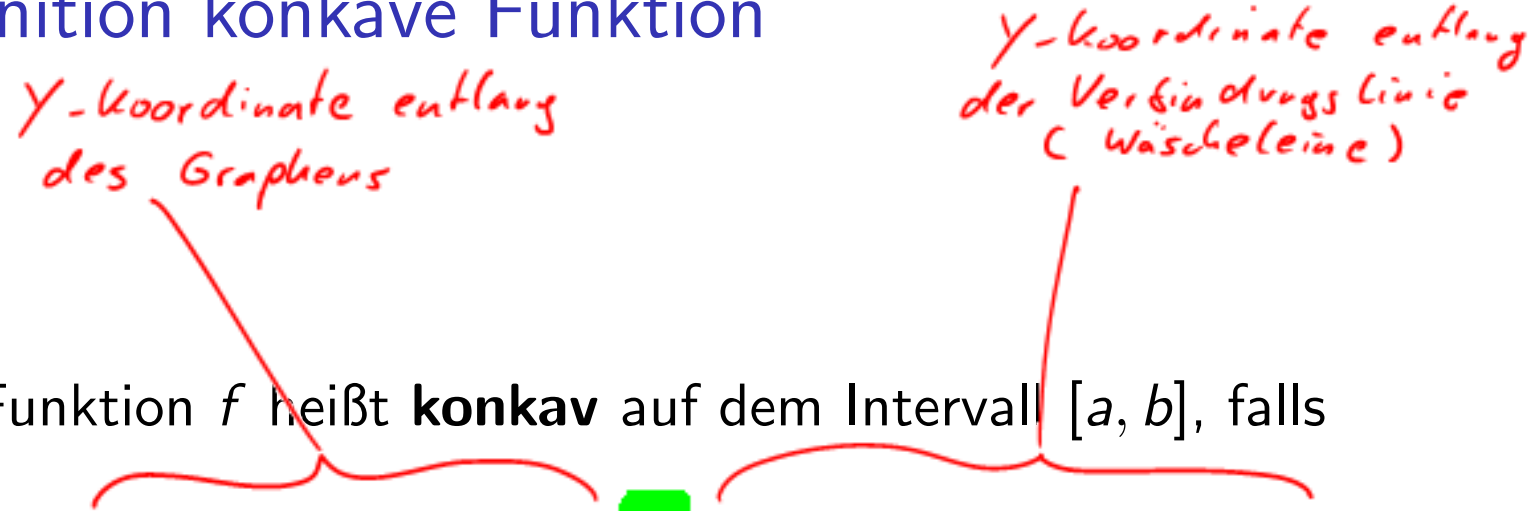


Mit der Konvexkombination von Punkten können wir nun die „Wäscheleine“ als Formel darstellen:




$$C = \lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$$

# 8.2 Definition konkave Funktion




Eine Funktion $f$ heißt **konkav** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \geq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist $f$ **strikt konkav**.

# 8.2 Definition konvexe Funktion

Eine Funktion $f$ heißt **konvex** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

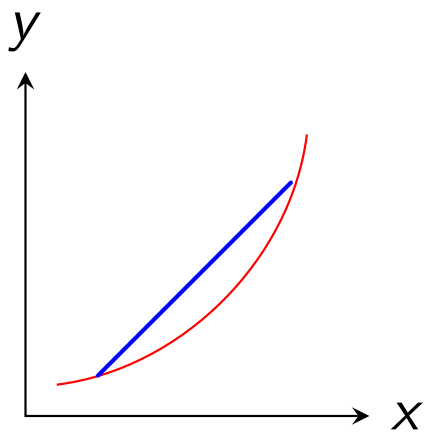
$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

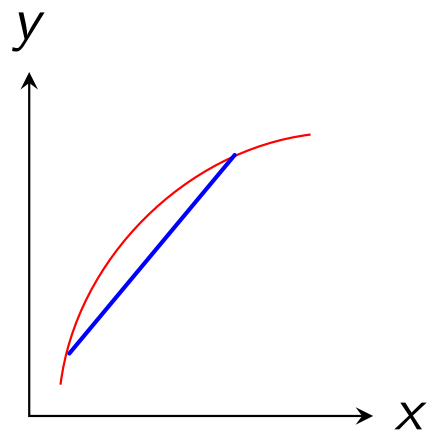
Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist $f$ **strikt konvex**.

Anmerkung: Falls $f$ konvex ist, so ist $-f$ konkav.

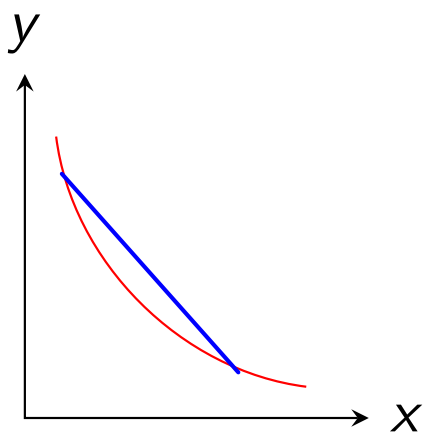
# Monotonie und Krümmung



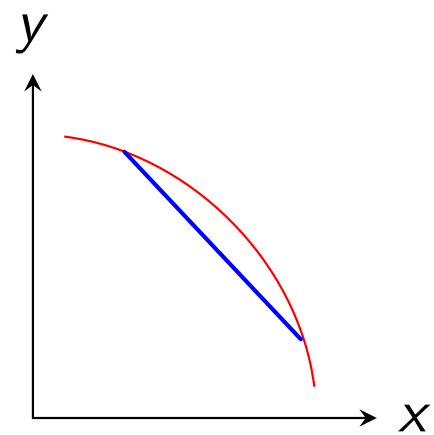

wachsend, konvex




wachsend, konkav




fallend, konvex



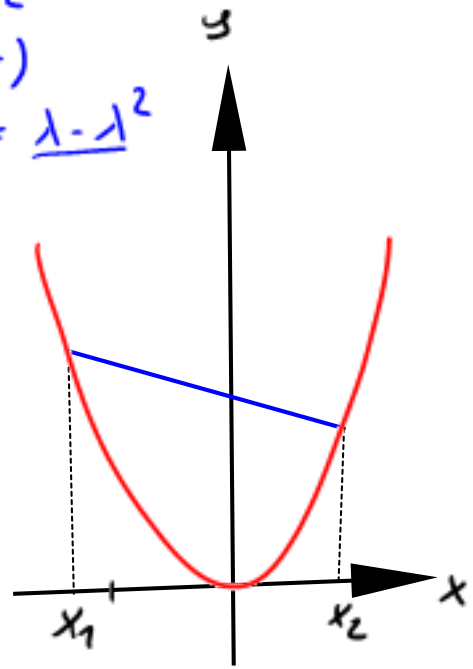

fallend, konkav

# Beispiel $f(x) = x^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\lambda - \lambda - (1-\lambda)^2 = 1 - \lambda - (1 - 2\lambda + \lambda^2)$

$= 1 - \lambda - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = \lambda - \lambda^2$




Erfüllt $f(x) = x^2$ die Ungleichung für Konvexität?

f konvex

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$(\underbrace{\lambda}_{a} x_1 + \underbrace{(1-\lambda)}_{b} x_2)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2$$

$$(\lambda x_1)^2 + 2 \cdot \lambda x_1 \cdot (1-\lambda) x_2 + ((1-\lambda) x_2)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2$$

$$\lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2$$

$$0 \leq \lambda x_1^2 - \lambda^2 x_1^2 - 2\lambda(1-\lambda) x_1 x_2 + (1-\lambda) x_2^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2$$

$$0 \leq (\lambda - \lambda^2) x_1^2 - 2(\lambda - \lambda^2) x_1 x_2 + \underbrace{\left(1 - \lambda - (1-\lambda)^2\right)}_{\lambda - \lambda^2} x_2^2$$

$$0 \leq (\lambda - \lambda^2)\left[x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2\right] = \underbrace{(\lambda - \lambda^2)}_{\geq 0} \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \checkmark$$

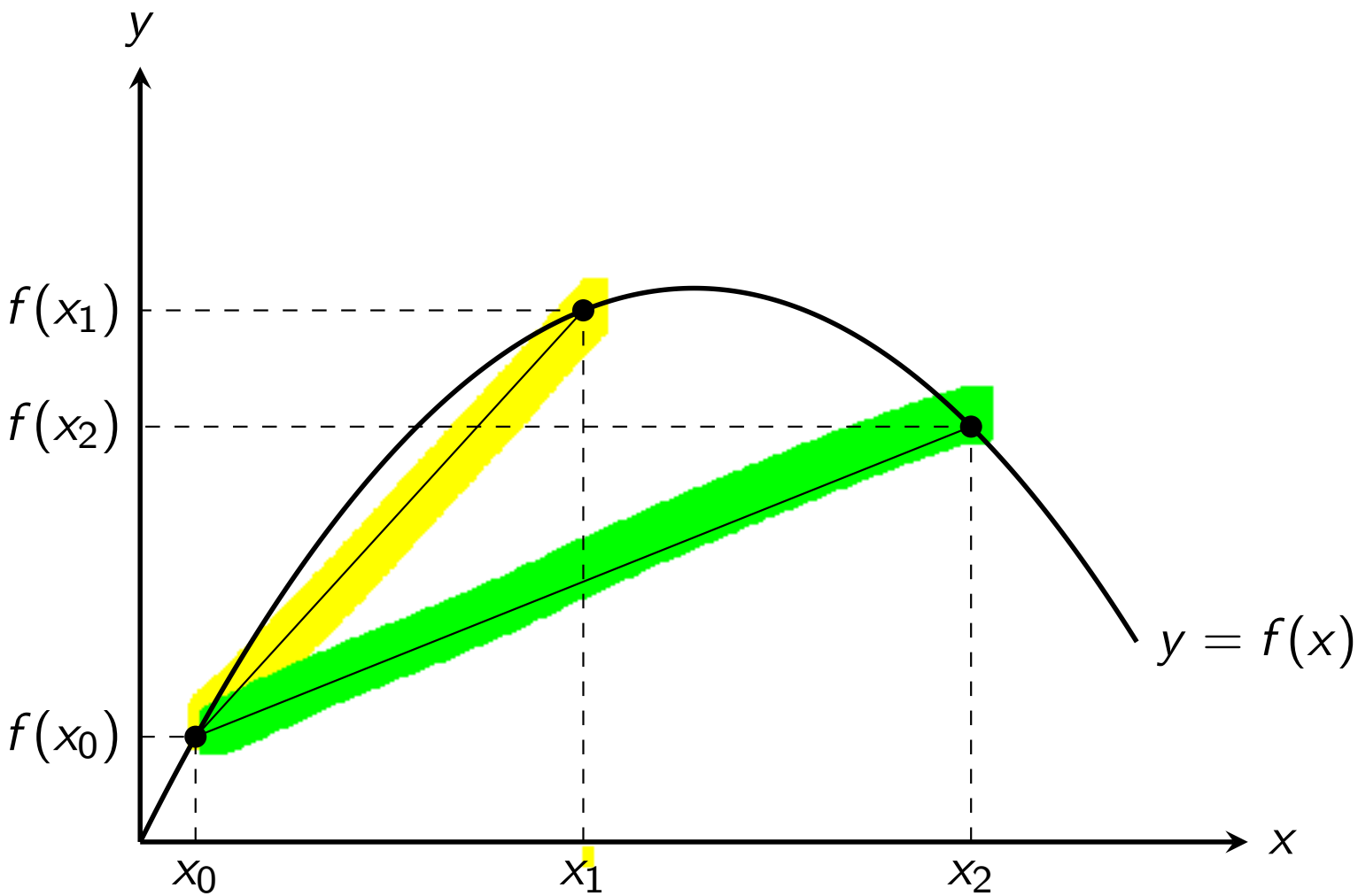
# Steigungs-Charakterisierung

Sei $x > x_0$. Die Steigung der Sekante von $(x_0, f(x_0))$ nach $(x, f(x))$ sei definiert durch

$$s(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Eine Funktion $f$ ist:

- (strikt) konkav, genau dann, wenn für jedes feste $x_0$ die Steigung $s(x_0, x)$ (strikt) monoton fallend ist in $x$;
- (strikt) konvex, genau dann, wenn für jedes feste $x_0$ die Steigung $s(x_0, x)$ (strikt) monoton wachsend ist in $x$.


y
f(x1)
f(x2)
f(x0)
y = f(x)
x
x0
x1
x2

# Beispiel $f(x) = x^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ist $s(x_0, x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ strikt monoton wachsend in $x$?

Hier:

$$s(x_0, x) = \frac{\overset{a^2}{x^2} - \overset{b^2}{x_0^2}}{x - x_0} = \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = x + x_0$$

$s(x_0, x) = x + x_0$ streng monoton steigend,

also ist $f(x) = x^2$ streng konvex.

# 8.3 Allgemeine Eigenschaften

Wir präsentieren in diesem Abschnitt allgemeine Eigenschaften konkaver Funktionen.

Mit der Regel

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow -f \text{ konvex}$$

Lassen sich diese Eigenschaften leicht für konvexe Funktionen anwenden.

# Summen

$x^2$ : streng konvex

$-2x+2$ : konkav, konvex

Sind die Funktionen $f$ und $g$ konkav, so ist $f+g$ ebenfalls konkav.

Ist hierbei $f$ oder $g$ strikt konkav, so ist $f+g$ strikt konkav.

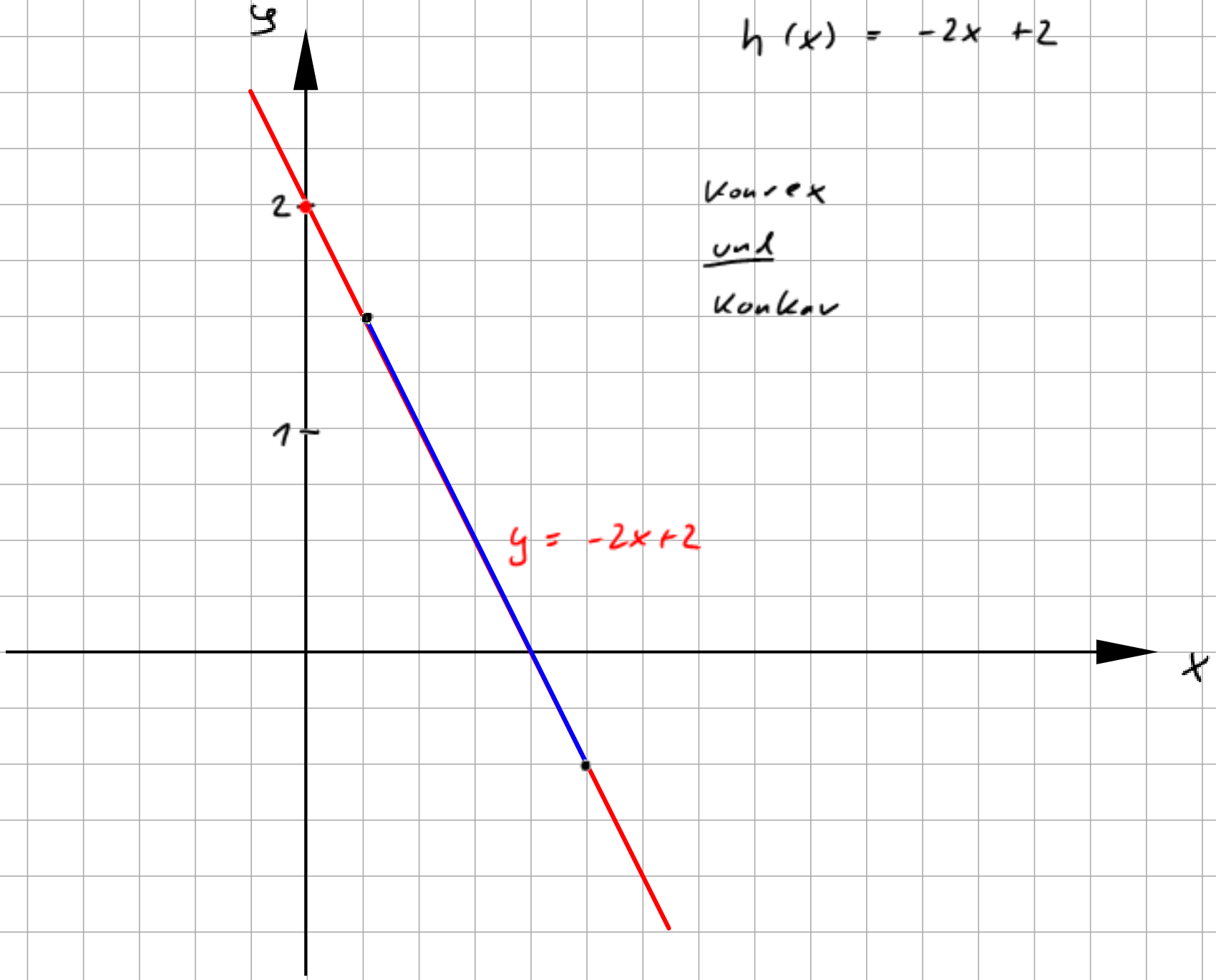
Beispiel:

Ist $f(x) = x^2 - 2x + 2$ konkav, konvex, oder weder noch?

str. konvex  konvex

$\Rightarrow$ Summe: streng konvex

$h(x) = -2x + 2$




konvex

und

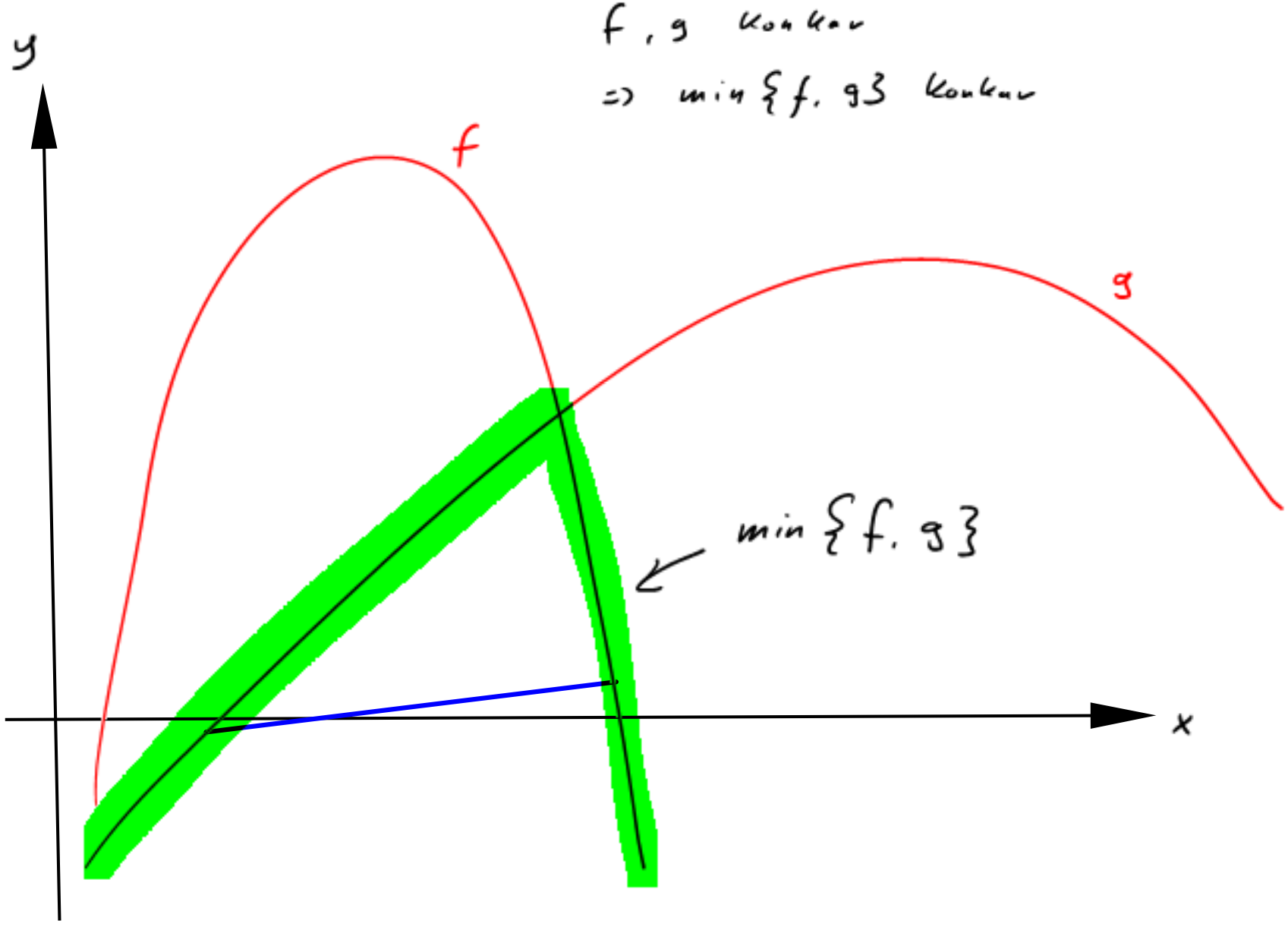
konkav

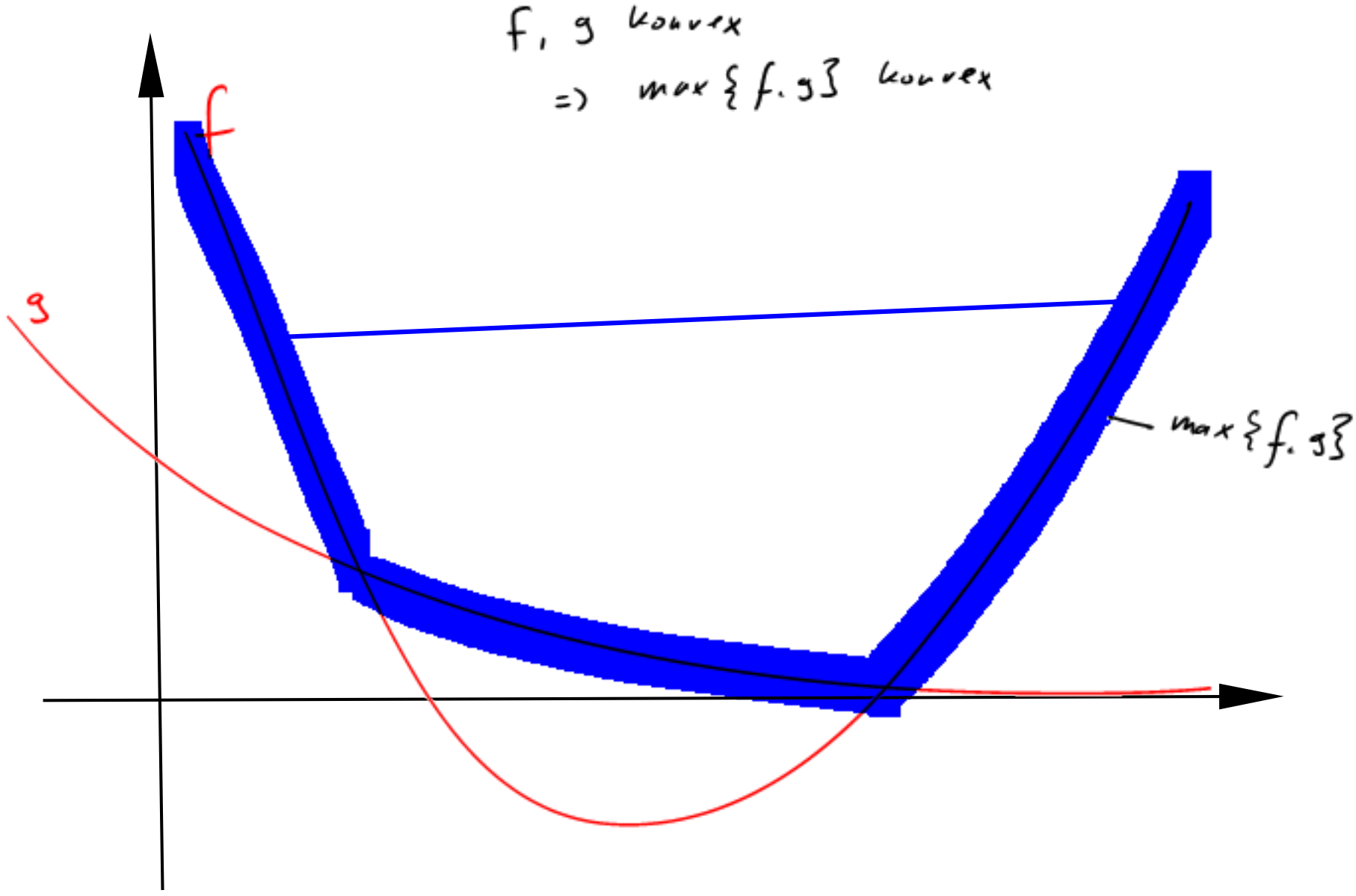
# Minima und Maxima

Sind die Funktionen $f$ und $g$ konkav, so ist $\min\{f, g\}$ ebenfalls konkav.

Dies ist äquivalent zu:

Sind die Funktionen $f$ und $g$ konvex, so ist $\max\{f, g\}$ ebenfalls konvex.


f, g konkav
⇒ min{f, g} konkav
y
f
g
min{f, g}
x


f, g konvex
=> max{f, g} konvex
f
g
max{f, g}

# Übung:

konvex & konkav $\Rightarrow$ max{f, g} konvex

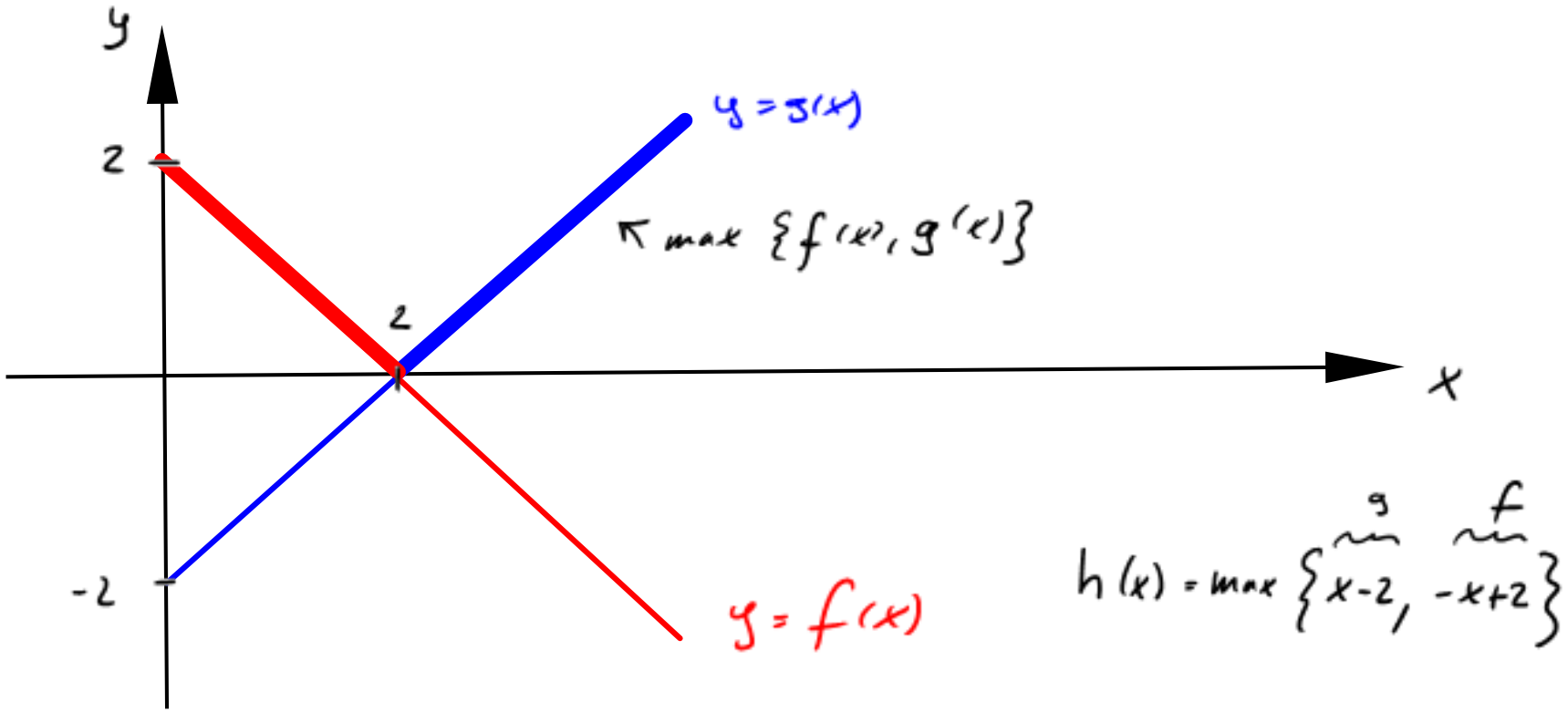
$f(x) = 2 - x$ und sei $g(x) = -2 + x$.

Ist $\max\{f, g\}$ konkav, konvex oder weder noch?

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Ist $h(x) = |x - 2|$ konkav, konvex, oder weder noch?

$= \max\{a, -a\}$



# Verkettung von Funktionen

Sei $f$ konkav und sei $g$ monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g \circ f$ ebenfalls konkav.

z.Z. $g(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \geq \lambda g(f(x_1)) + (1-\lambda) g(f(x_2))$

Begründung:

$f$ konkav: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$g$ mon. wachsend: $g(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \geq g(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$

$g$ konkav: $\geq \lambda g(f(x_1)) + (1-\lambda) g(f(x_2))$ ∎

# Inverse von Funktionen

Sei $f$ streng monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g = f^{-1}$ streng monoton wachsend und konvex.

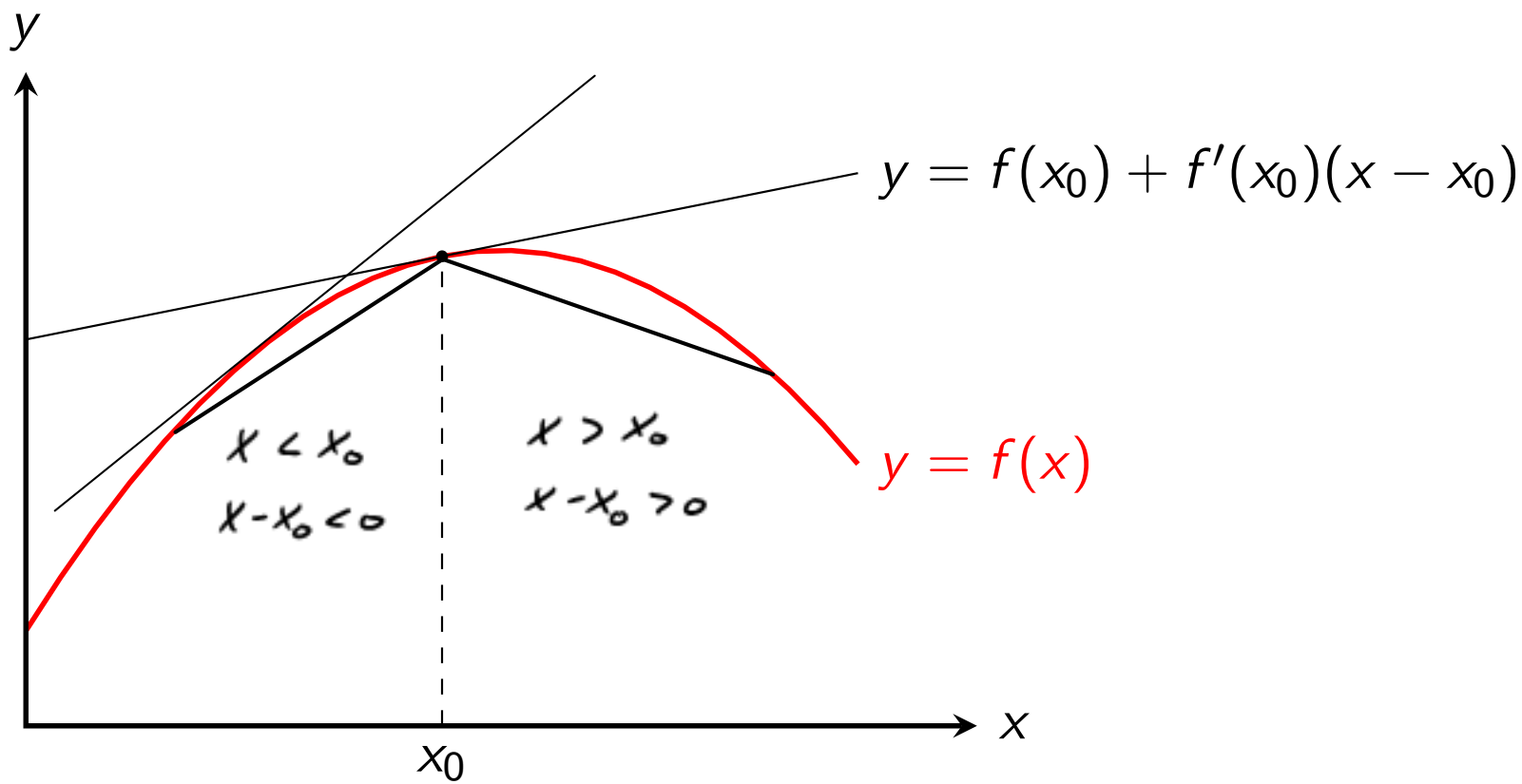
streng konvex

Bsp: $f(x) = x^2$ (für $x \geq 0$)

$f^{-1} = g(y) = \sqrt{y}$

streng konkav

# 8.4 Tests der ersten Ableitung



# Charakterisierung von konkaven und konvexen Funktionen

Die Funktion $f$ sei differenzierbar.

- $f$ ist konkav genau dann, wenn für alle $x_0$ und $x$ gilt:

Wert auf Graph — Wert auf Tangente

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Für $x > x_0$ ist dies äquivalent zu

$$s(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$$

und für $x < x_0$ ist dies äquivalent zu

$$s(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Gilt für $f(x) = x^2$ die Ungleichung

$f'(x) = 2x$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

für alle $x_0$ und $x$?

$$x^2 \geq x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$$

$$x^2 \geq x_0^2 + 2x_0 \cdot x - 2x_0 \cdot x_0$$

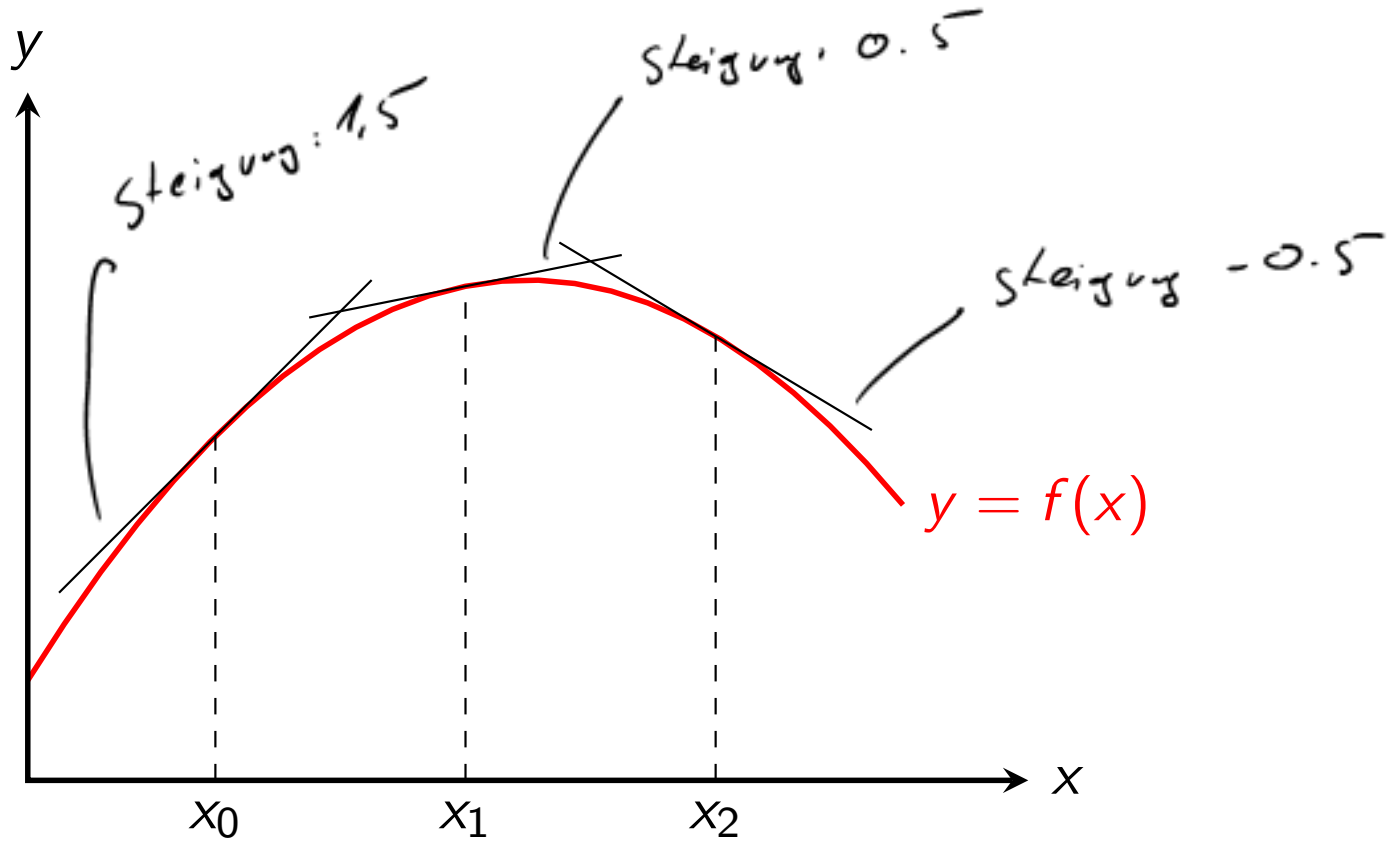
$$x^2 \geq -x_0^2 + 2x_0 \cdot x \qquad | + x_0^2 - 2xx_0$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 \geq 0$$

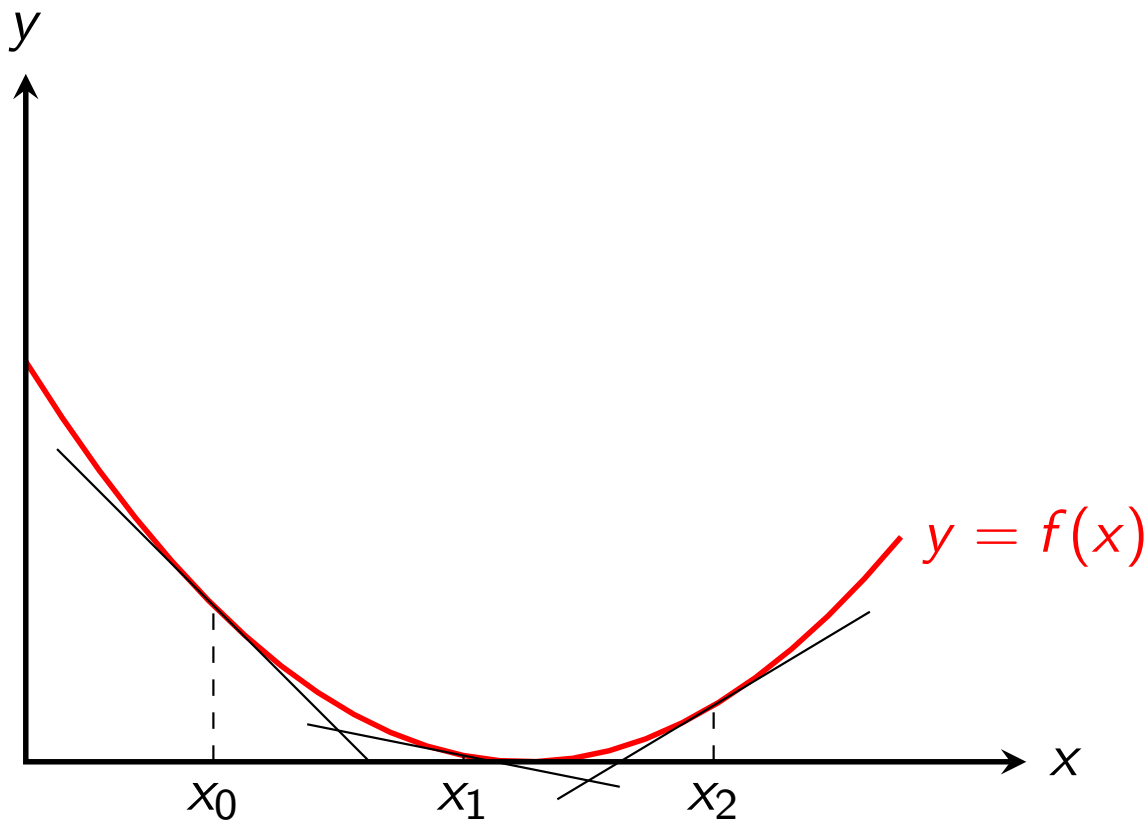
$$(x - x_0)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

# 8.5 Tests der zweiten Ableitung

## $f$ konkav: Die Steigung der Tangente fällt in $x$



# $f$ konvex: Die Steigung der Tangente wächst in $x$



# 8.5 Tests der zweiten Ableitung

$g(x) = x^4$
$g'(x) = 4x^3$
$g''(x) = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2 \geq 0$
für $x=0$: $g''(0) = 0$

Sei $f$ zweimal differenzierbar.

$f''(x) \leq 0$ für alle $x \Leftrightarrow f$ ist **konkav**

$f''(x) < 0$ für alle $x \Rightarrow f$ ist **streng konkav**

$f''(x) \geq 0$ für alle $x \Leftrightarrow f$ ist **konvex**

$f''(x) > 0$ für alle $x \Rightarrow f$ ist **streng konvex**

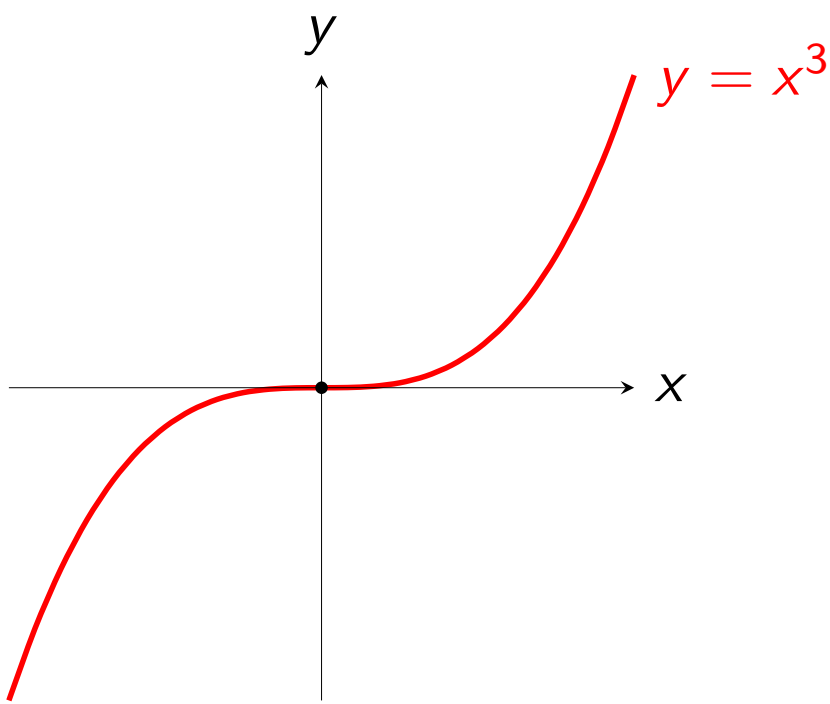
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x^2$ streng konvex

# 8.6 Wendestellen

Sei $f$ zweifach differenzierbar.

Die Stelle $x_0$ heißt **Wendestelle** für $f$, falls $f''$ in $x_0$ das Vorzeichen wechselt.

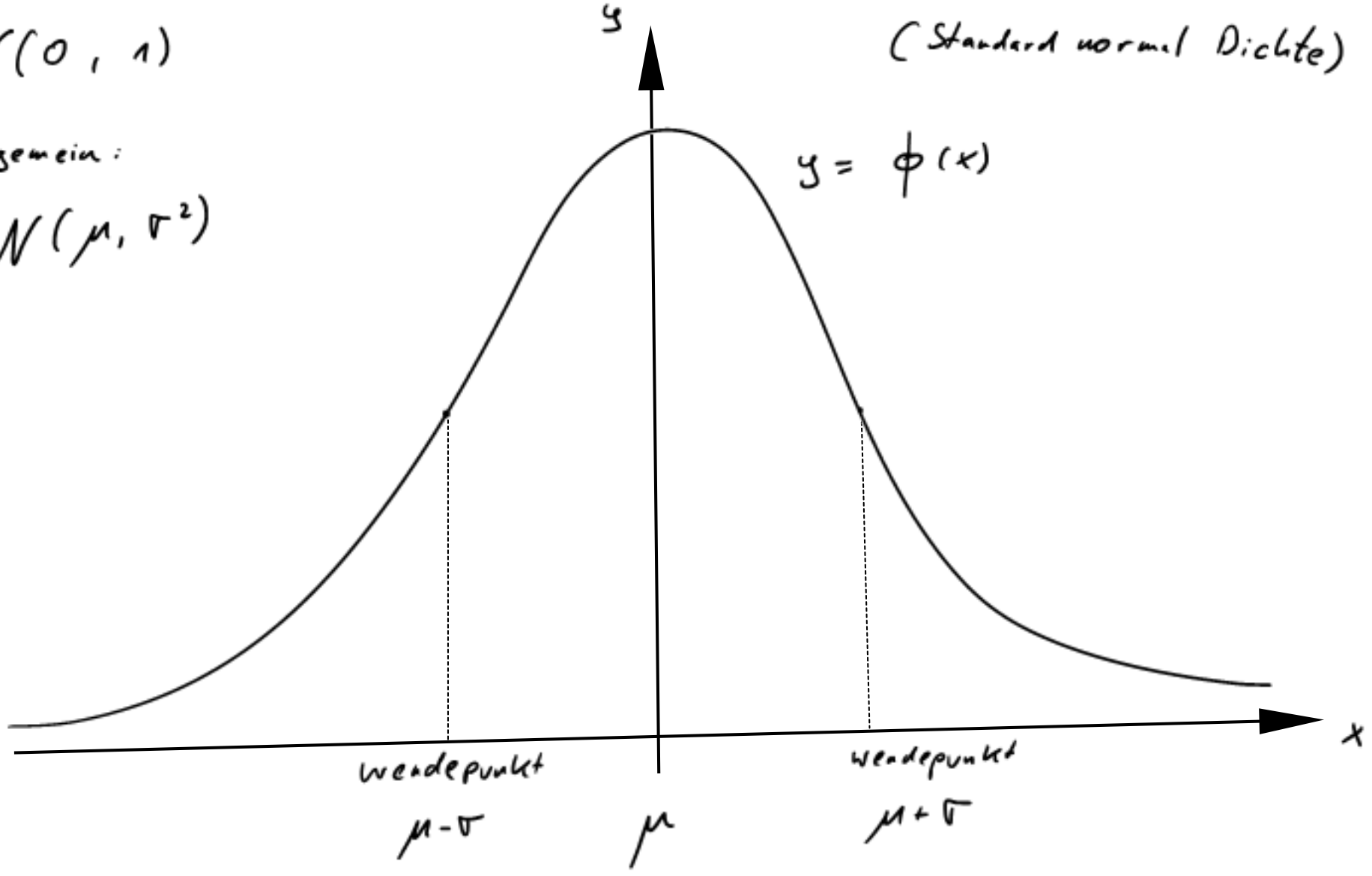
Der Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** des Graphen von $f$.



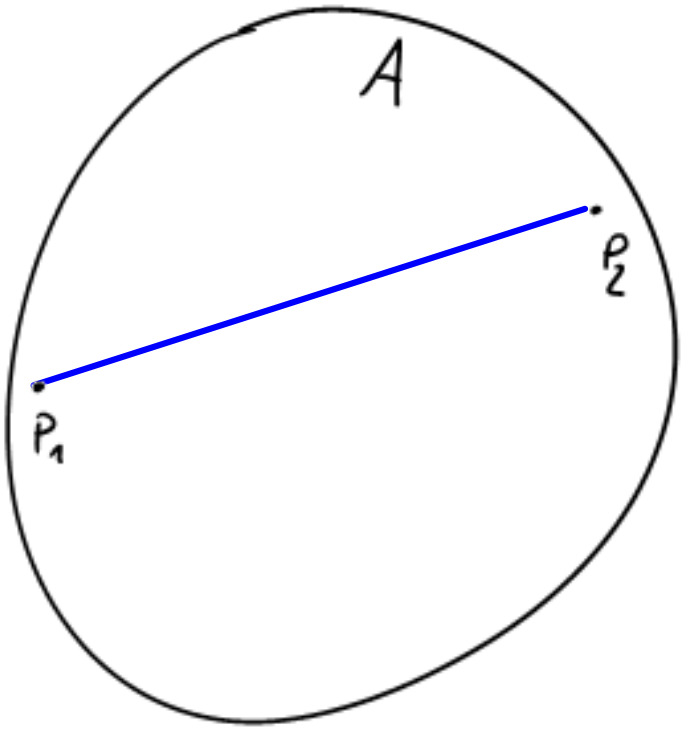
$N(0, 1)$ (Standard normal Dichte)

allgemein:

$N(\mu, \sigma^2)$

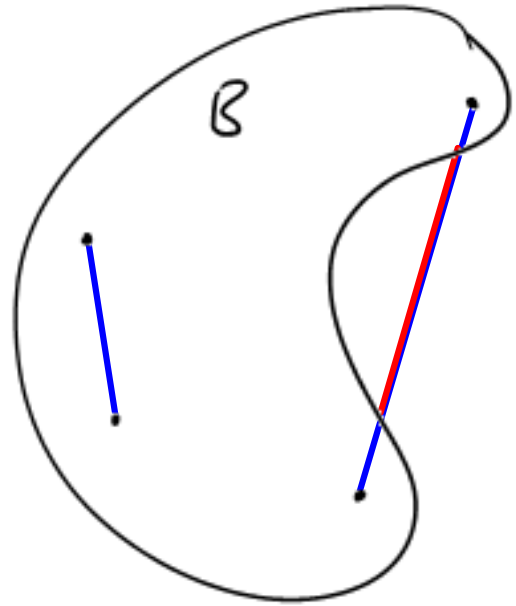


# Konvexe Mengen




Für alle $P_1, P_2 \in A$ :

$\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \in A$ für alle $\lambda \in [0,1]$




nicht konvex

# Zusammenfassung

- Konkavität / Konvexität
- Summen und Minima / Maxima
- Verkettung und Inverse
- Tests der ersten Ableitung
- Tests der zweiten Ableitung
- Wendestellen und Wendepunkte