Vorlesung zu Kapitel 10:[1]

Integration

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

10.1 Unbestimmte Integrale

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

10.4 Ökonomische Anwendung

Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

10.5 Partielle Integration

10.6 Integration durch Substitution

10.7 Uneigentliche Integrale

Integralrechnung

Von welcher Funktion F ist eine gegebene Funktion f die Ableitung?

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften:

- Maß für Handelsgewinne von Konsument:innen
- Maß für Kosten und Gewinne von Firmen
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ...

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f eine stetige und F eine differenzierbare Funktion.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\int$: **Integralzeichen**
$f(x)$: **Integrand**
x: **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)
C: **Integrationskonstante**

$f(x) = x^{r} \rightsquigarrow f'(x) = r\,x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{r+1}\,x^{r+1}\right)' = \frac{r+1}{r+1}\,x^{r+1-1} \rightsquigarrow f(x) = x^{r}$

$x^{r+1} \rightsquigarrow (r+1)\,x^{r+1-1} = (r+1)\,x^{r}$

Das heißt: $\frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C$ ist eine Stammfunktion von x^{r}

Einige wichtige Integrale: Potenzfunktionen

$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Beispiele:

Probe

$$\int x^1 \, dx \overset{r=1}{=} \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C = \frac{1}{2} x^2 + C \qquad \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{2} 2x^1 = x$$

$$\int x^{-3} \, dx = \int \frac{1}{x^3} \, dx \overset{r=-3}{=} \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2} x^{-2} + C \qquad \left(\frac{1}{-2}x^{-2} + C\right)' = \frac{-2}{-2} x^{-3} = x^{-3}$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \int \sqrt{x} \, dx \overset{r=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C \qquad \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$$

Sonderfall $r = -1$

$$\int x^{-1}\,dx \overset{x\neq 0}{=} \int \frac{1}{x}\,dx \overset{x\neq 0}{=} \ln(|x|) + C$$

$$\ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

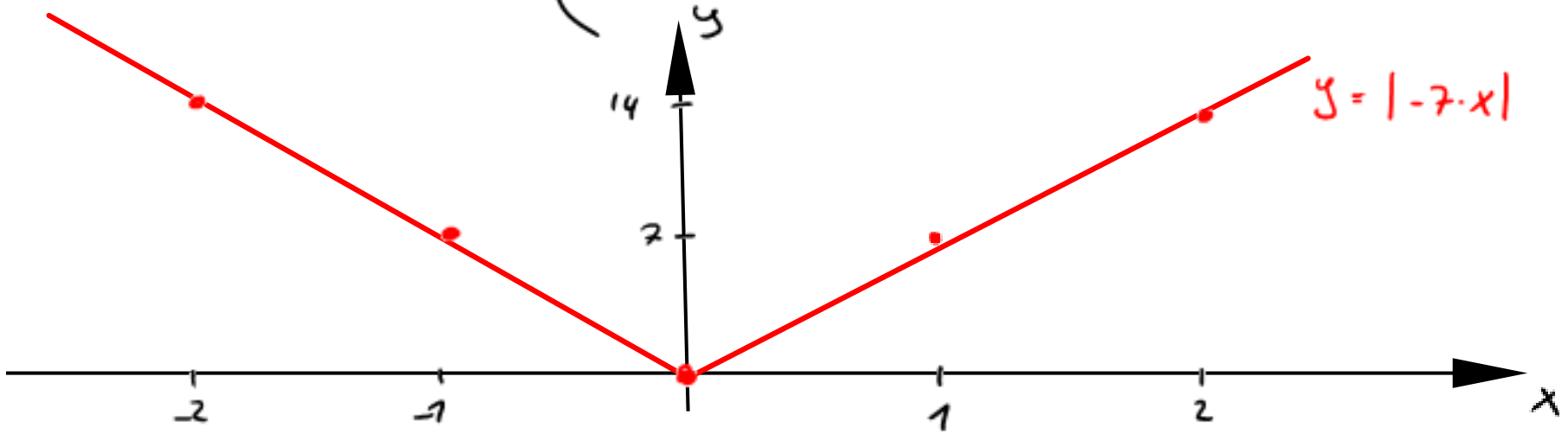
$$\left(\ln(|x|)\right)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \underbrace{\frac{1}{-x}}_{\text{äußere Ableitung}} \underbrace{(-1)}_{\text{innere Ableitung}} = \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\overset{x>0}{\left(\ln(x)\right)'} = \frac{1}{x}$$

Die Betragsfunktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |-7 \cdot x| = |-7| \cdot |x| = 7 \cdot |x| = \begin{cases} -7x & -7x \geq 0 \quad | : (-7) \\ & \Leftrightarrow x \leq 0 \\ 7x & -7x < 0 \end{cases}$$



Das Integrationszeichen $\int$

Summenzeichen



Das Integrationszeichen $\int$ ist aus dem langen s „ſ“ der Frakturschrift entstanden.

Der Buchstabe ſ steht für lat. summa und deutet darauf hin, dass ein Integral eigentlich eine Summe ist.

Einige andere wichtige Integrale

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C \text{ (für } x \neq 0)$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \text{ (für } a \neq 0)$$

$$\int a^{x}\, dx = \frac{1}{\ln(a)} a^{x} + C \text{ (für } a > 0,\ a \neq 1)$$

Grundlegende Integrationsregeln

Wie bei Summen gilt:

$$\int a f(x)\ dx = a \int f(x)\ dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 5$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{3}x^3 + 2x + 5\,dx$$

$$= \int \frac{1}{3}x^3\,dx + \int 2x\,dx + \int 5x^0\,dx \qquad (x^0 = 1)$$

$$= \frac{1}{3}\int x^3\,dx + 2\int x^1\,dx + 5\int x^0\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) + 5\left(x + C_3\right)$$

$$= \frac{1}{12}x^4 + x^2 + 5x + \underbrace{\frac{1}{3}C_1 + 2C_2 + 5C_3}_{C}$$

$$\left(\frac{1}{12}x^4 + x^2 + 5x + C\right)' = \frac{4}{12}x^3 + 2x + 5$$

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion und sei F die Stammfunktion von f.

Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$.

Das bestimmte Integral bezeichnen wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx = \Big|_a^b F(x) \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^3 + 2x + 5 \, dx = F(2) - F(-1)$$

$$F(x) = \frac{1}{12}x^4 + x^2 + 5x + C$$

$$F(2) = \frac{1}{12}2^4 + 2^2 + 5 \cdot 2 + C = \frac{1}{12} \cdot 16 + 4 + 10 + C = \frac{16}{12} + 14 + C$$

$$F(-1) = \frac{1}{12}(-1)^4 + (-1)^2 + 5(-1) + C = \frac{1}{12} + 1 - 5 + C = \frac{1}{12} - 4 + C$$

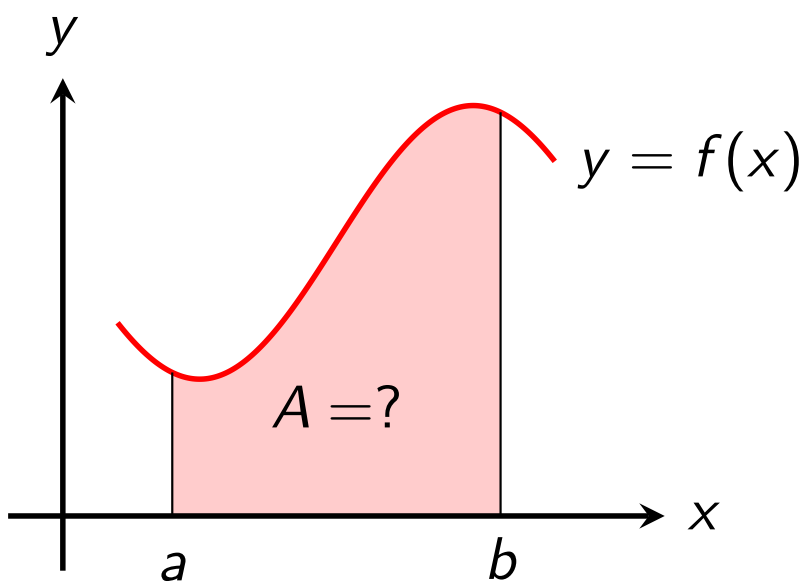
$$F(2) - F(-1) = \frac{16}{12} + 14 + C - \left(\frac{1}{12} - 4 + C\right)$$

$$= \frac{16}{12} + 14 + \cancel{C} - \frac{1}{12} + 4 - \cancel{C} = \frac{15}{12} + 18$$

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{4} = 16$$

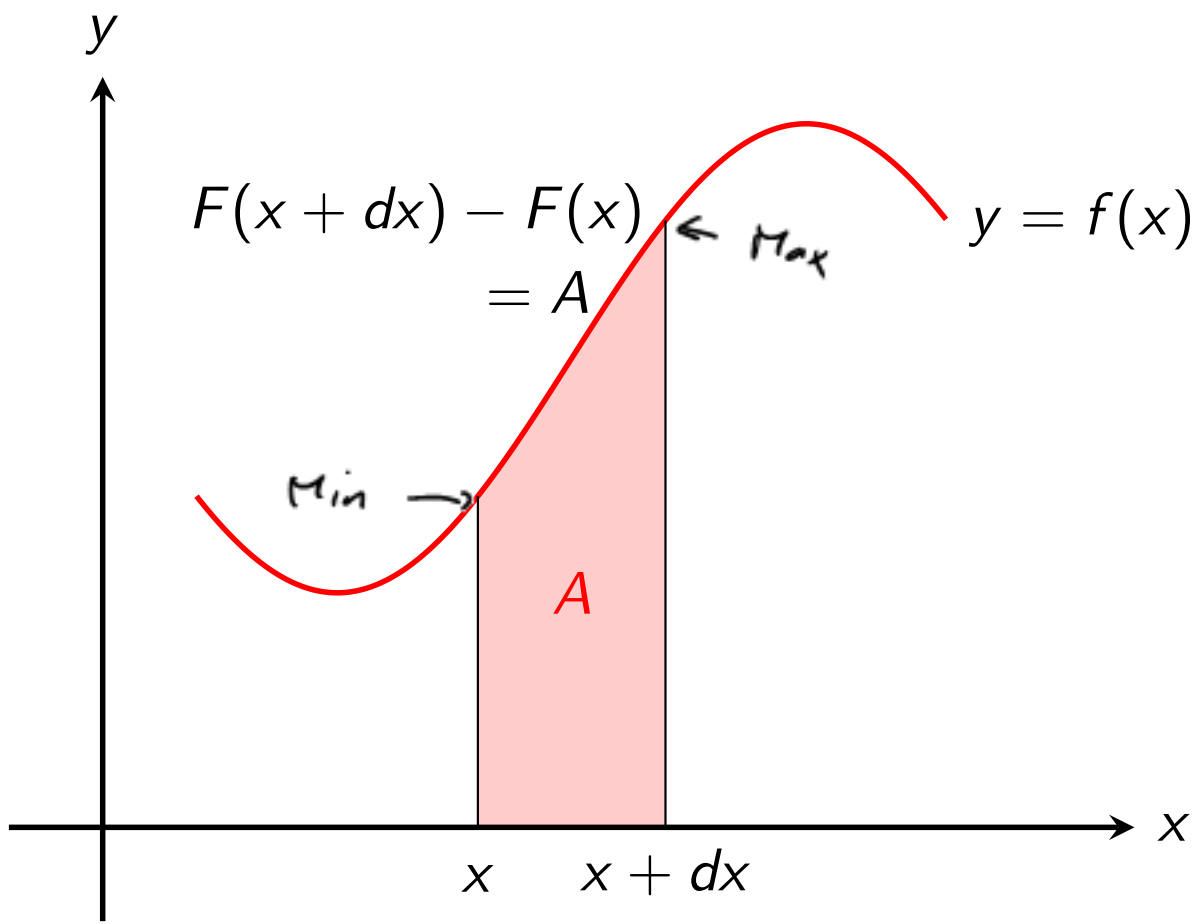
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Wie berechnen wir die Fläche A unter dem Graphen einer stetigen und nichtnegativen Funktion f über dem Intervall $[a, b]$?



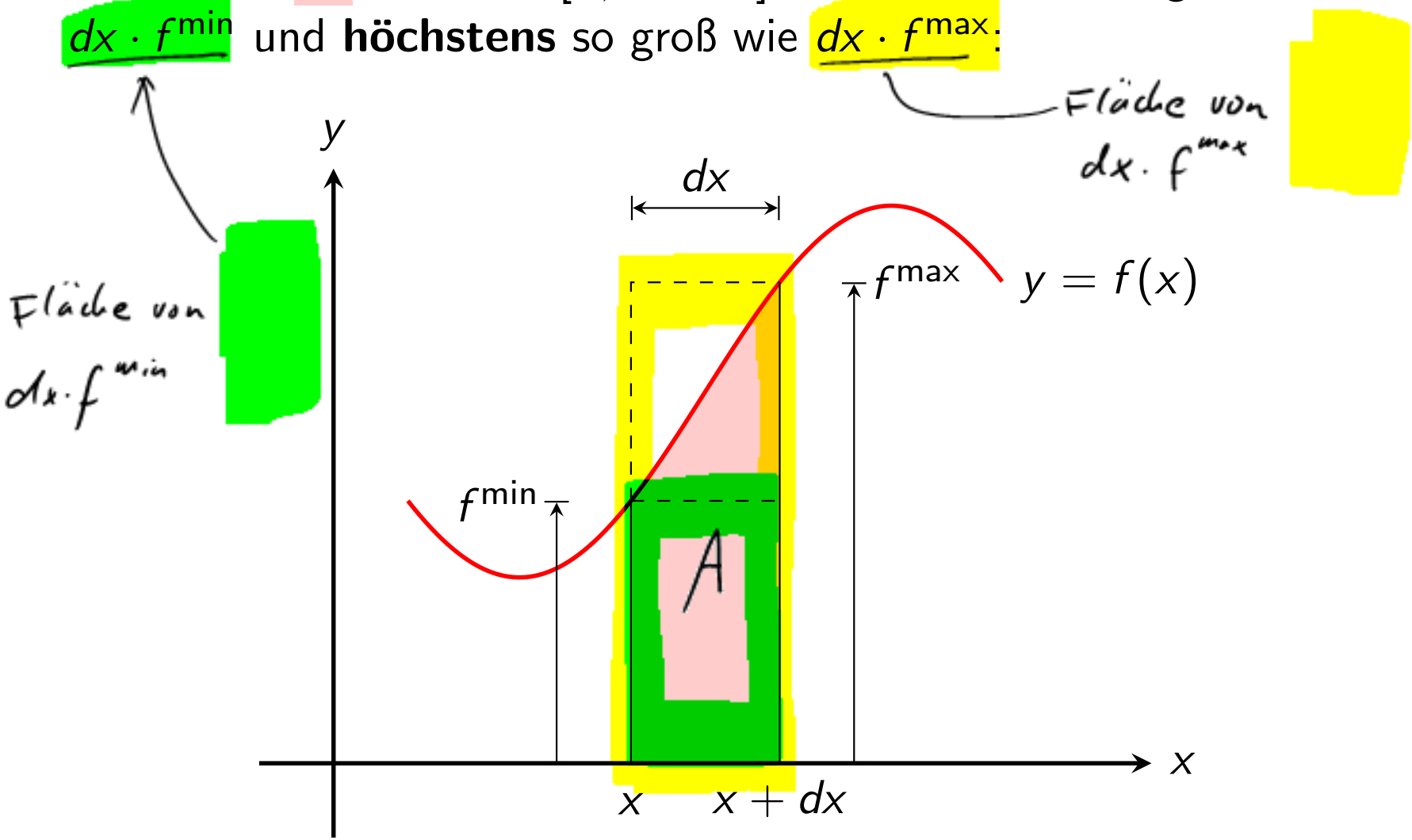
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

A: Fläche unter f (stetig, ≥ 0) auf dem Intervall $[x, x + dx]$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Die Fläche A zwischen $[x, x + dx]$ ist **mindestens** so groß wie $dx \cdot f^{\min}$ und **höchstens** so groß wie $dx \cdot f^{\max}$:

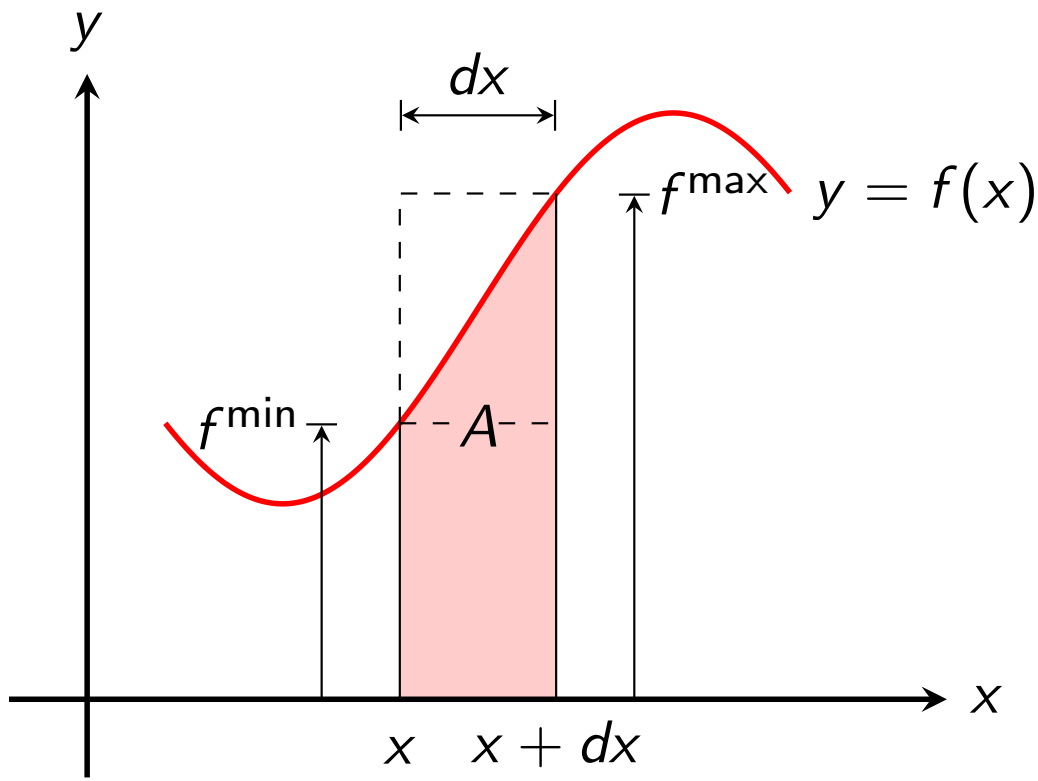


10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Es gilt also

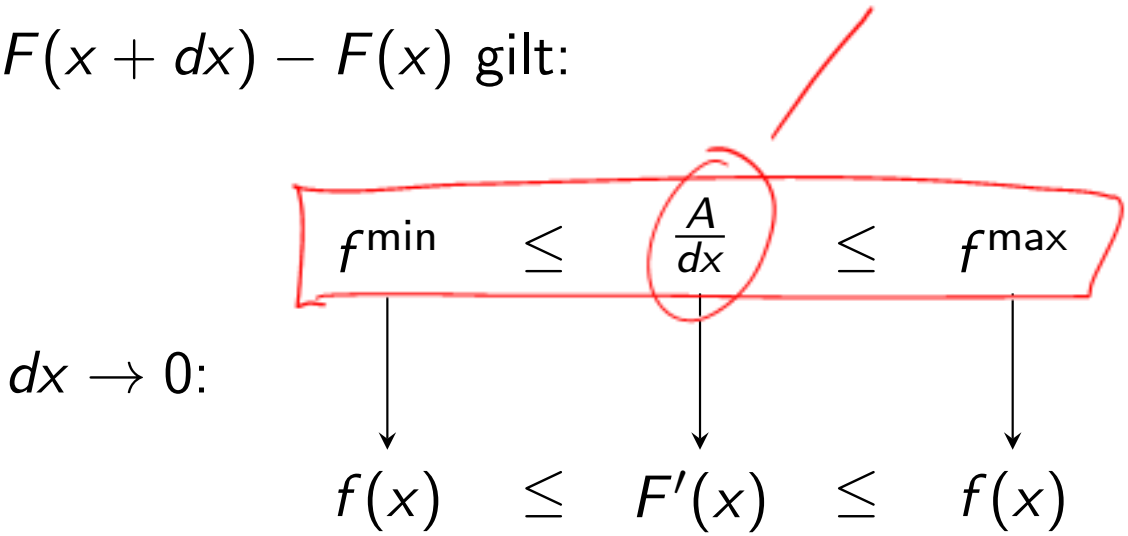
$$dx \cdot f^{min} \leq A \leq dx \cdot f^{max} \quad | : dx$$

$$f^{\min} \leq \frac{A}{dx} \leq f^{\max}$$



Fläche als bestimmtes Integral

Mit $A = F(x + dx) - F(x)$ gilt:



Damit gilt $F'(x) = f(x)$ und:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

Die Fläche A entspricht also $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

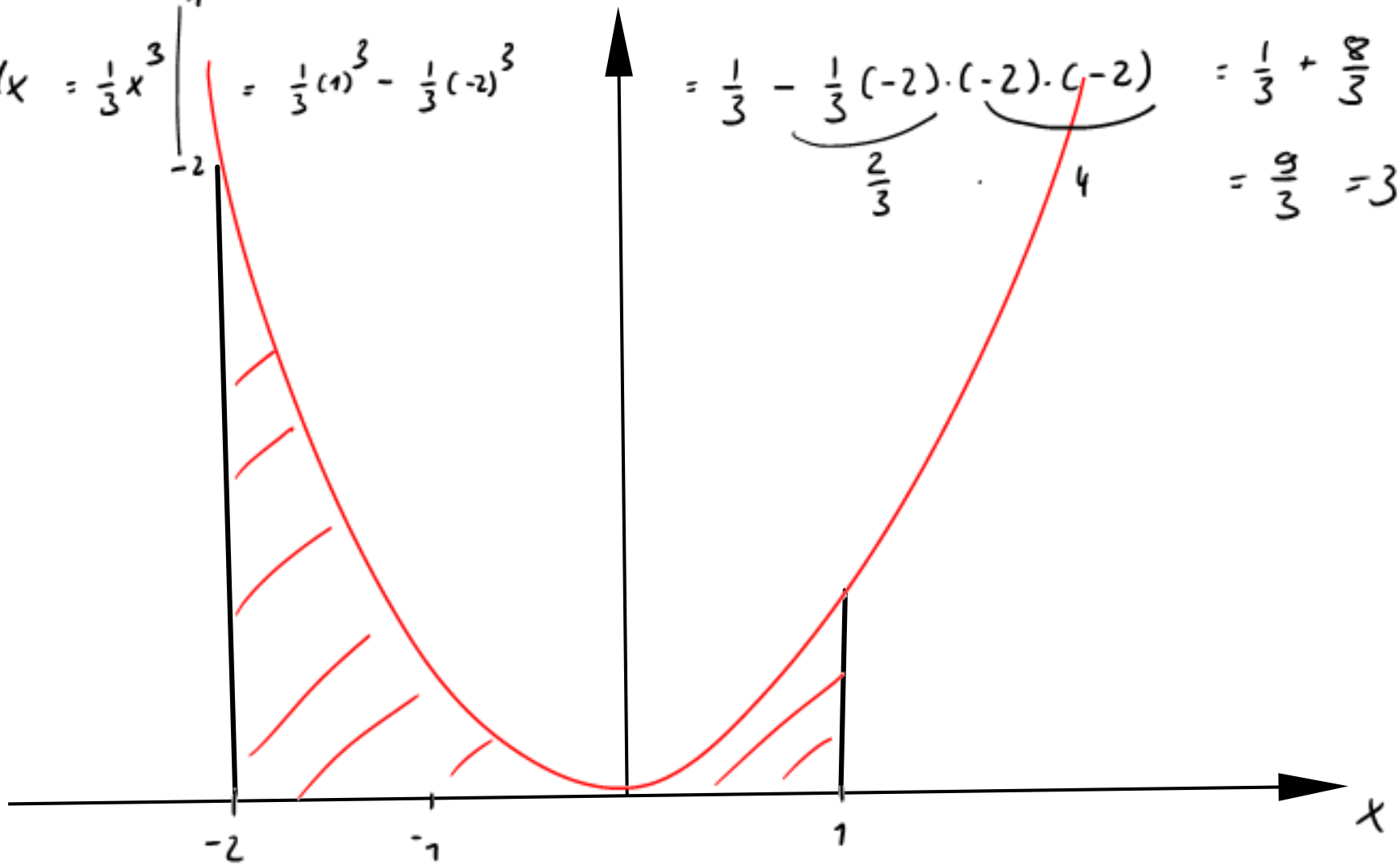
Beispiel: Fläche von $f(x) = x^2$ auf $[-2, 1]$

Pause bis 11 Uhr

$$\int_{-2}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(-2)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3} \qquad 4$$

$$= \frac{9}{3} = 3$$



10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ $\quad F(a) - F(a) = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $a < c < b$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sei f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F.

Dann gilt:

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = F'(b) = f(b)\ .$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)dx = -F'(a) = -f(a)\ .$$

Beispiel $A = \int_a^b x^2 dx$

Wie verändert sich die Fläche A, wenn sich a oder b ändern?

$$A = \int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$\frac{dA}{db} = b^2 \qquad \frac{dA}{da} = -1 \cdot a^2 = -a^2$$

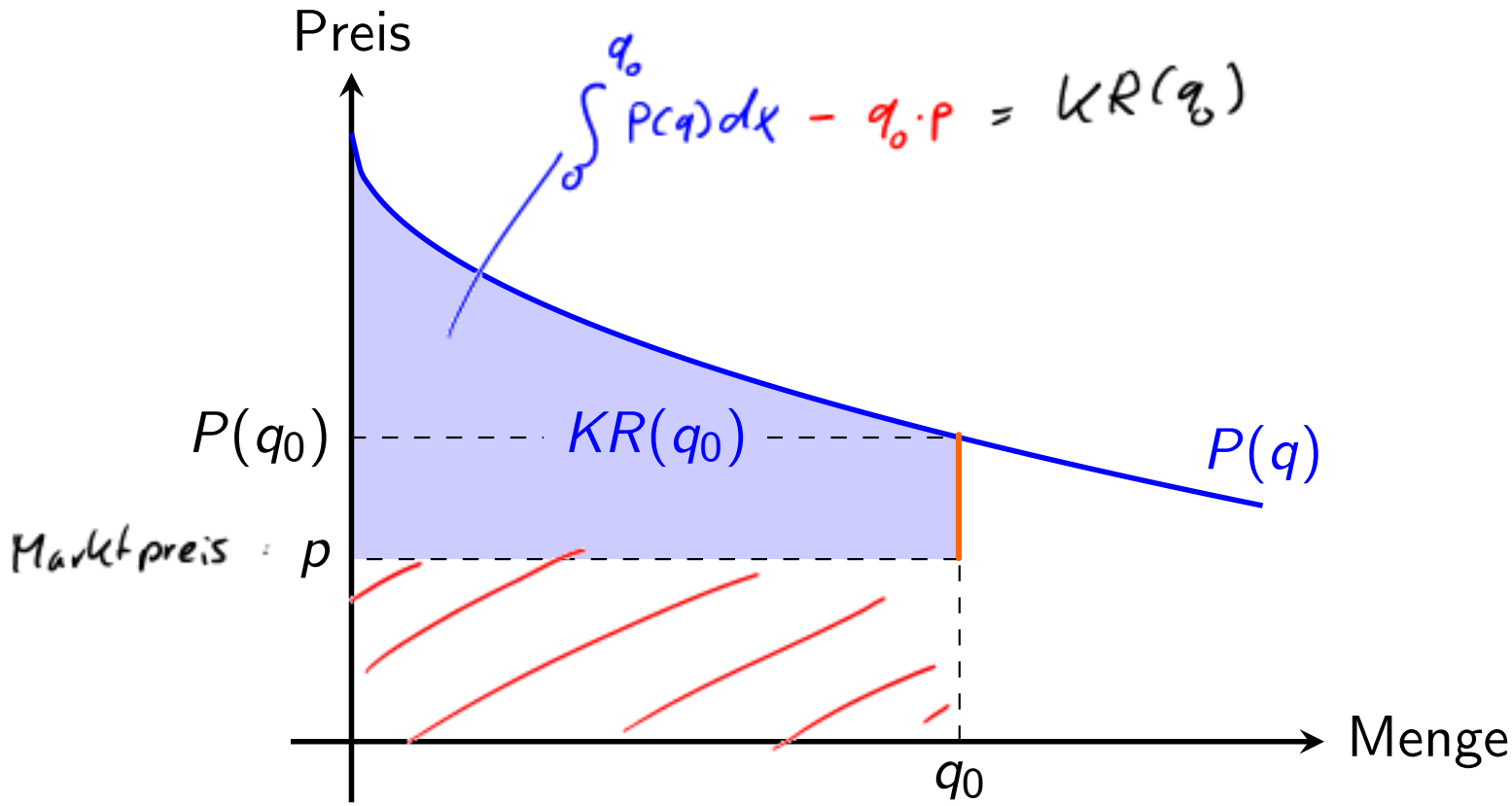
10.4 Ökonomische Anwendungen

- Konsumentenrente
- Kosten
- Produzentenrente
- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswerte

Konsumentenrente KR

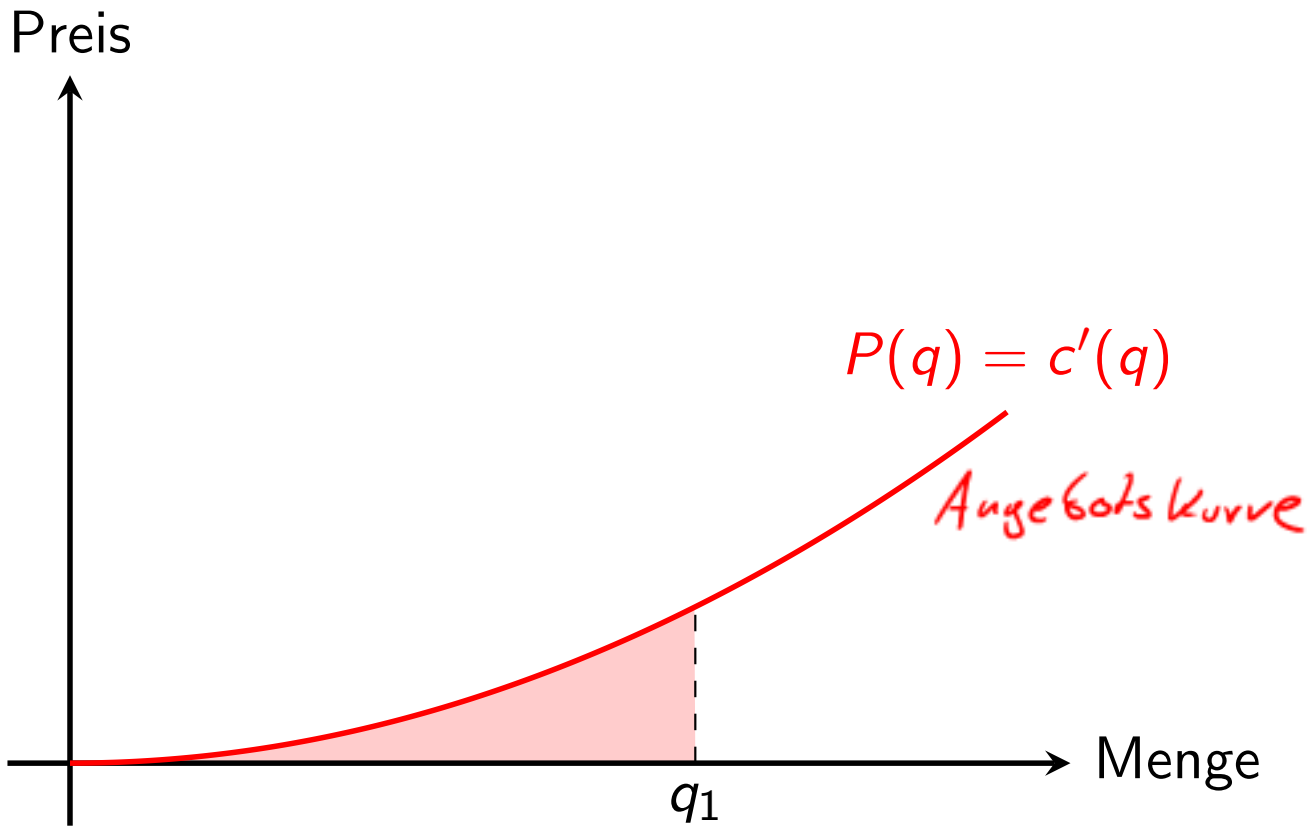
Nachfragefunktion $D(p)$

inverse Nachfragefunktion $P(q)$



$KR'(q_0) = P(q_0) - p$

Angebotskurve und Kosten



Fläche unter der Angebotskurve:

Fixkosten

$$\int_0^{q_1} c'(q)dq = c(q_1) - c(0)$$

Gewinn: Erlös Kosten

$$\pi(q) = \overbrace{p(q) \cdot q}^{\text{Erlös}} - \overbrace{C(q)}^{\text{Kosten}}$$

$$\pi'(q) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow (p(q) \cdot q)' - C'(q) = 0$$

$$\Leftrightarrow p'(q) \cdot q + p(q) \cdot 1 - C'(q) = 0$$

Wettbewerbsmarkt:

Keine Firma hat Marktmacht

$\rightsquigarrow$ Marktpreis ist konstant

$\rightsquigarrow$ $p(q) = p$ $\rightsquigarrow$ $p'(q) = 0$

$$\pi(q) = p \cdot q - C(q)$$

$$\pi'(q) = p - C'(q) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{p = C'(q)}$$

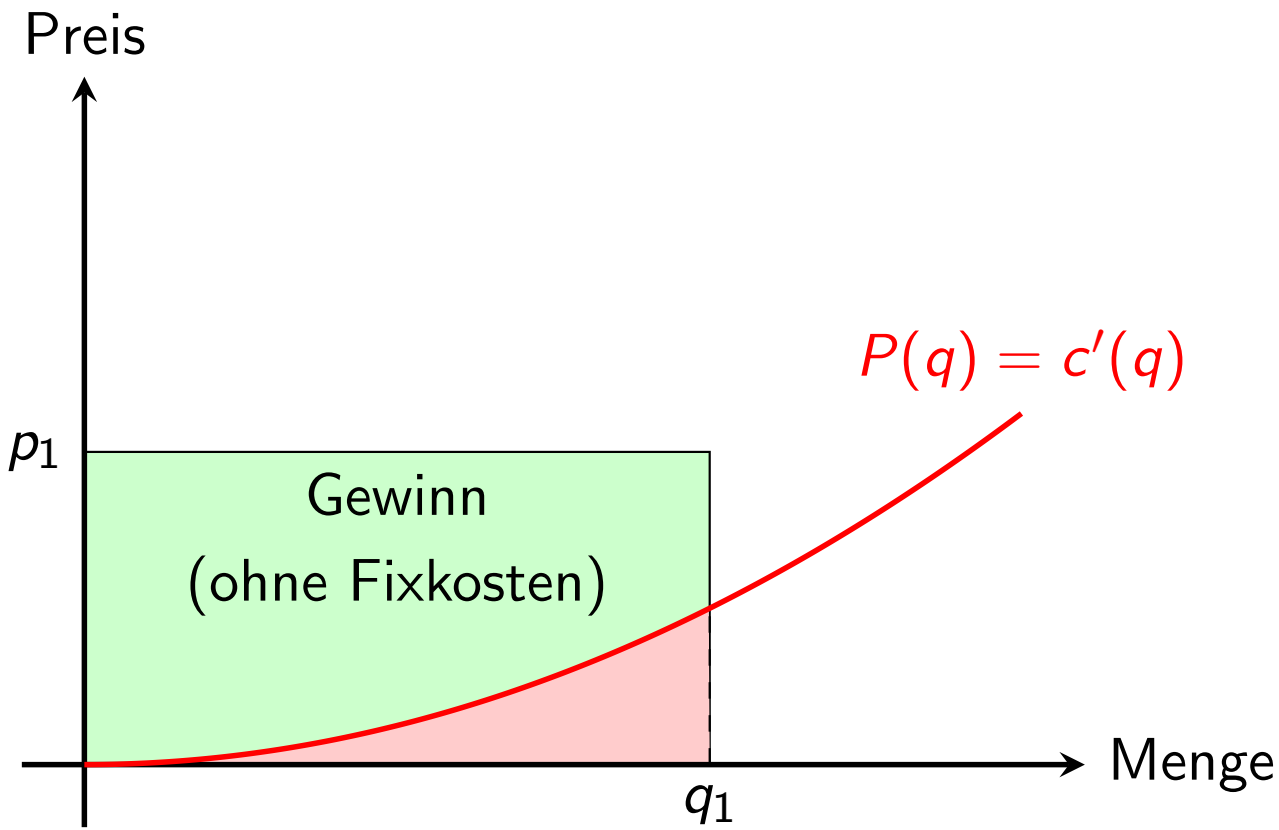
Preis = Grenzkosten

Produzentenrente PR

Die Firma biete q_1 Einheiten zum Preis p_1 an.

Erlös: $p_1 \cdot q_1$

Gewinn: $\pi(q_1) = p_1 \cdot q_1 - c(q_1)$

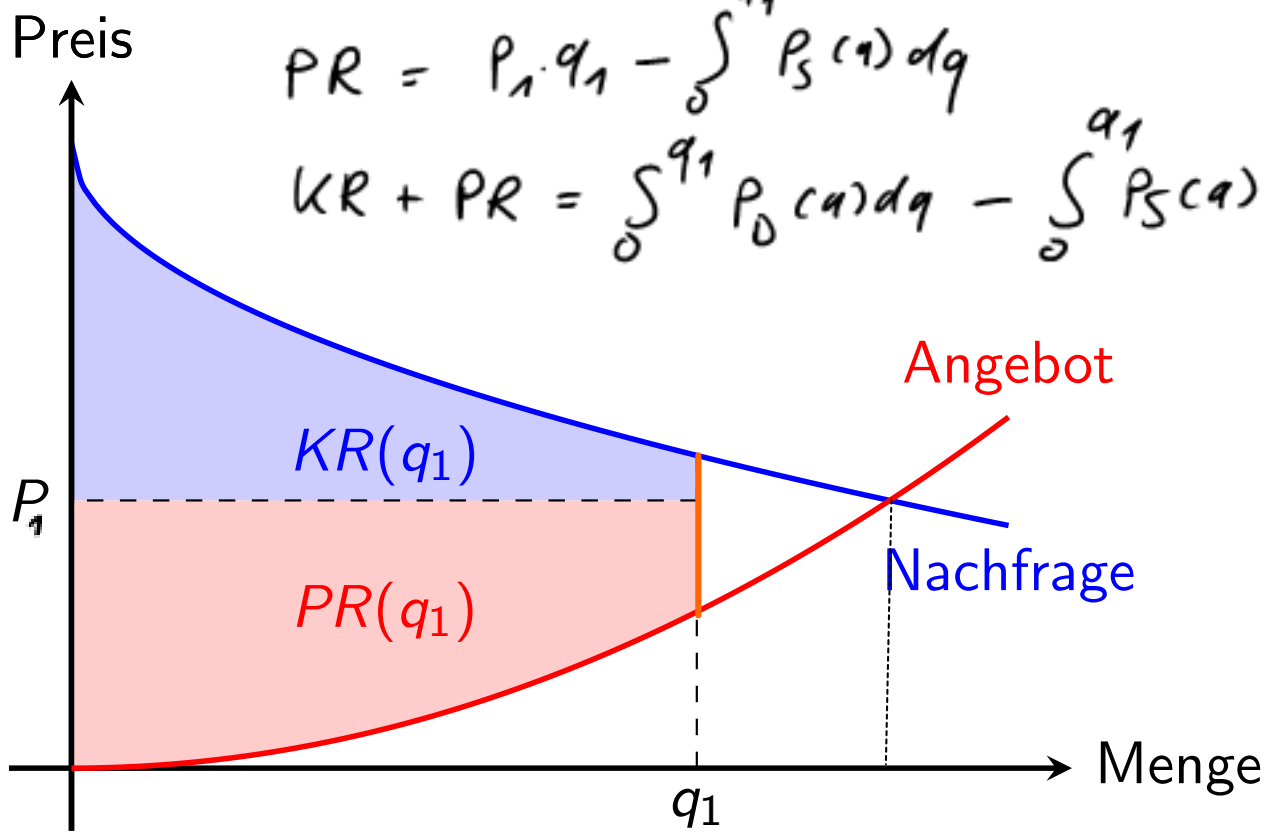


Wohlfahrt

$$KR = \int_0^{q_1} P_D(q)\,dq - q_1 \cdot P_1$$

$$PR = P_1 \cdot q_1 - \int_0^{q_1} P_S(q)\,dq$$

$$KR + PR = \int_0^{q_1} P_D(q)\,dq - \int_0^{q_1} P_S(q)\,dq$$



$$W'(q_1) = P_D(q_1) - P_S(q_1) > 0$$

Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(q_1) = KR(q_1) + PR(q_1) = \int_0^{q_1} (P_D(q) - P_S(q))\,dq$$

Wahrscheinlichkeiten

Betrachte eine stetige Zufallsvariable, welche durch die **Dichtefunktion** f beschrieben wird.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion F. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x_1 annimmt, ist durch

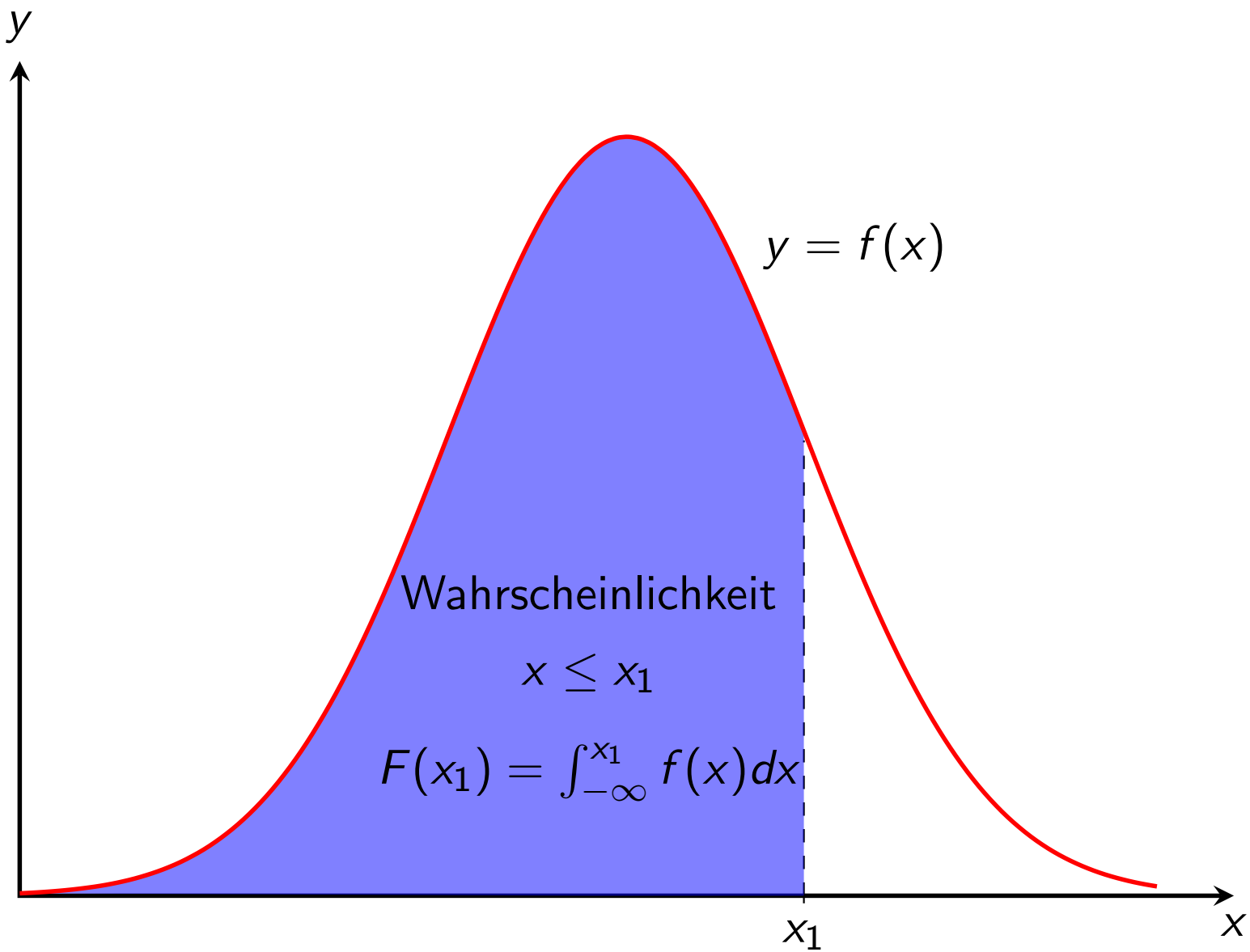
$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

gegeben.

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Wir nennen die Stammfunktion F auch **Verteilungsfunktion**.

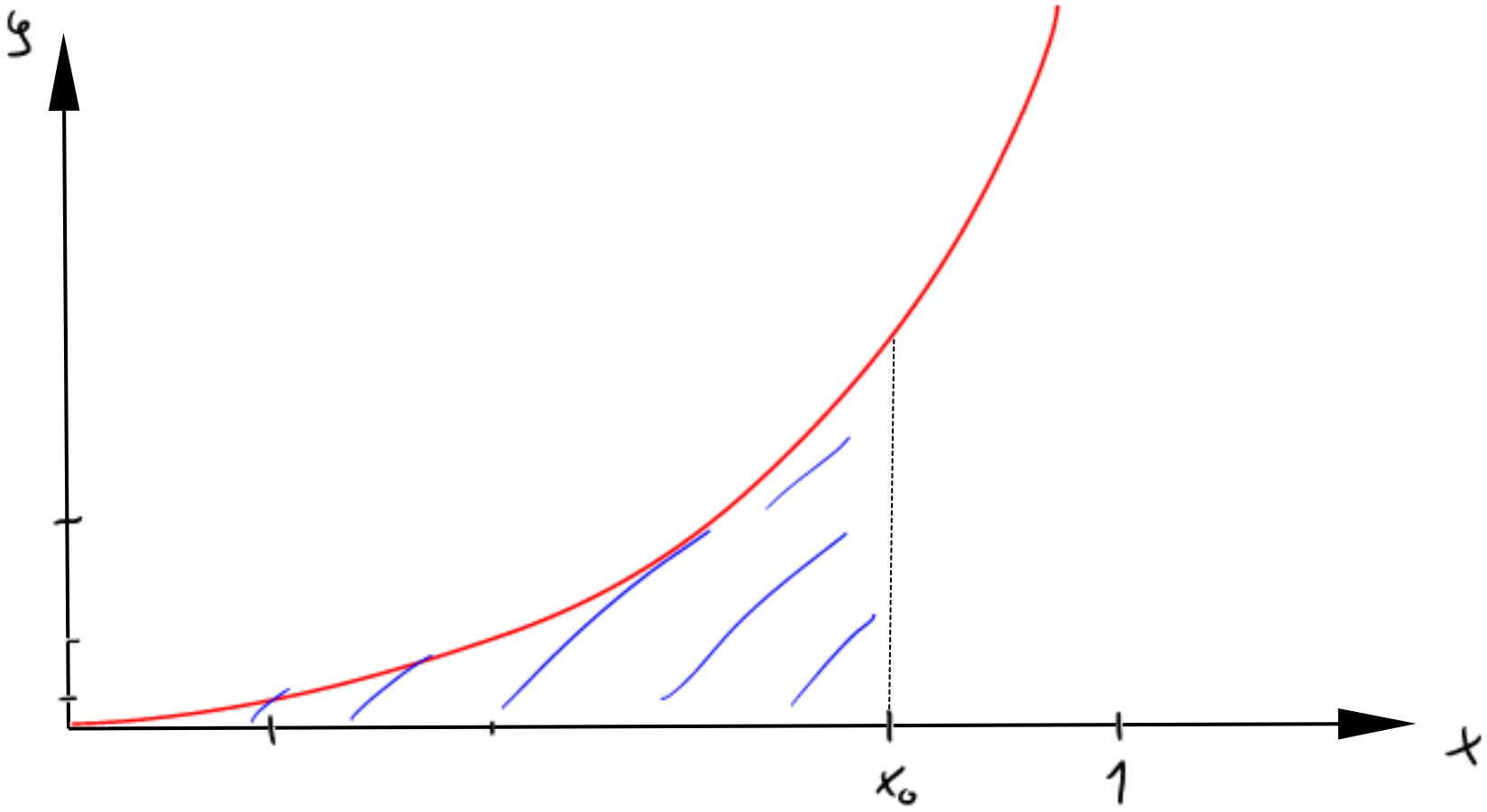
Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit



$$f(x) = 3x^2 \qquad x \geq 0$$

$$\int_0^{x_0} 3x^2 \, dx = x^3 \Big|_0^{x_0} = x_0^3 - 0^3 = x_0^3 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x_0 \leq 1$$



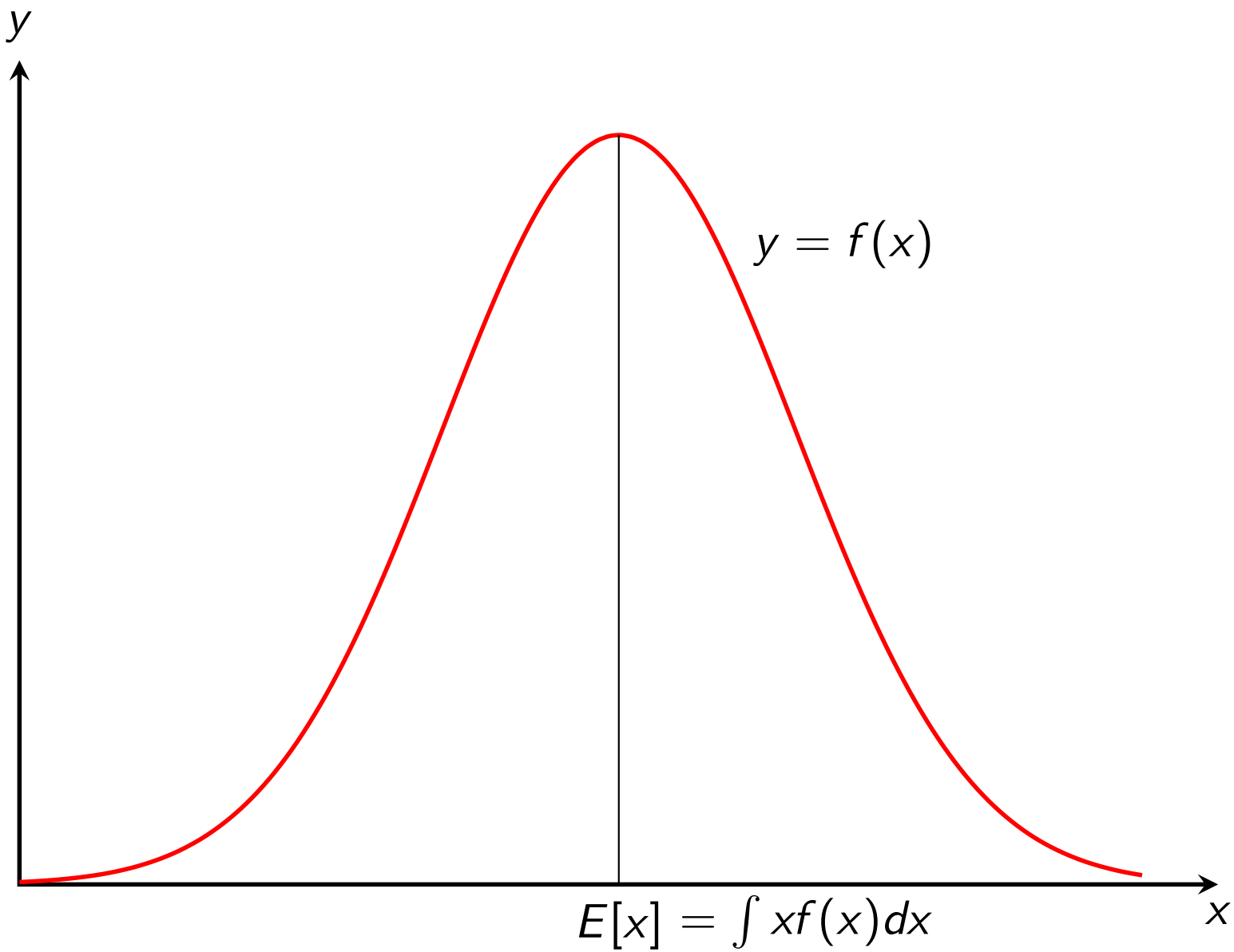
Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist der (theoretische) Durchschnittswert der Variablen bei unendlich vielen unabhängigen Ziehungen.

$$E[x] = \int x \cdot f(x) dx$$

Der Erwartungswert ist der „Gravitationspunkt“ der Dichtefunktion.

Erwartungswert



Beispiel Erwartungswert bei $f(x) = 3x^2$

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte $f(x) = 3x^2$.

Welche Werte kann X annehmen, falls der kleinste Wert von $X = 0$ ist?

Wie lautet der Erwartungswert von X?

10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

Beispiel 10.5.1 (partielle Integration)

Berechne:

$$\int xe^x dx$$

10.6 Integration durch Substitution

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Kettenregel:

$$(F(g(x))' = \underbrace{F'(g(x))}_{=f(g(x))} \cdot g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (F(g(x))'\, dx}_{F(g(x))} = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Außerdem gilt mit $u = g(x)$ und $du = g'(x)dx$:

$$F(u) = \int f(u) du$$

Beispiel 10.6.3

Berechne

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$$

Beispiel 10.6.6

Berechne

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x} dx$$

10.7 Uneigentliche Integrale

Wir sprechen von einem uneigentlichen Integral, falls (eine der) Integrationsgrenzen eines bestimmten Integrals gegen $\pm\infty$ geht und der Wert des Integrals gegen eine Zahl strebt:

$$\int_0^b f(x)dx \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty f(x)dx \in \mathbb{R}$$

Beispiel 10.7.1

Exponentialverteilte Zufallsvariable:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass $0 \leq X \leq b$?

Zusammenfassung

- Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- Integrationsregeln
- Flächen und bestimmte Integrale
- Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- Ökonomische Anwendungen
- Partielle Integration
- Integration durch Substitution
- Uneigentliche Integrale