Vorlesung zu Kapitel 07:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das Wichtigste aus Kapitel 6

$$(A + B \cdot x^r)' = B \cdot r \cdot x^{r-1} \quad , A, B, r \in \mathbb{R}$$

Produktregel

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$\left(f(\underbrace{g(x)}_{y})\right)' = f'(\underbrace{g(x)}_{y}) \cdot g'(x)$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

7.1 Implizites Differenzieren

7.3 Ableitung der Inversen

7.4 Lineare Approximation

7.5 Polynomiale Approximation

7.7 Elastizitäten

7.8 Stetigkeit

7.9 Mehr über Grenzwerte

7.10 Der Zwischenwertsatz

7.12 Regel von L'Hôpital

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert. Hier gilt jeweils $y = f(x)$.

Beispiele:

$$x \cdot y = 18$$

$$\sqrt{y} = x$$

$$y^3 + 3x^2 \cdot y = 13$$

Wie bestimmt man die Ableitung $y' = f'(x)$?

Implizite Differentiation

Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du die Ableitung y' so:

(i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x. Betrachte dabei y als Funktion von x.

(ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

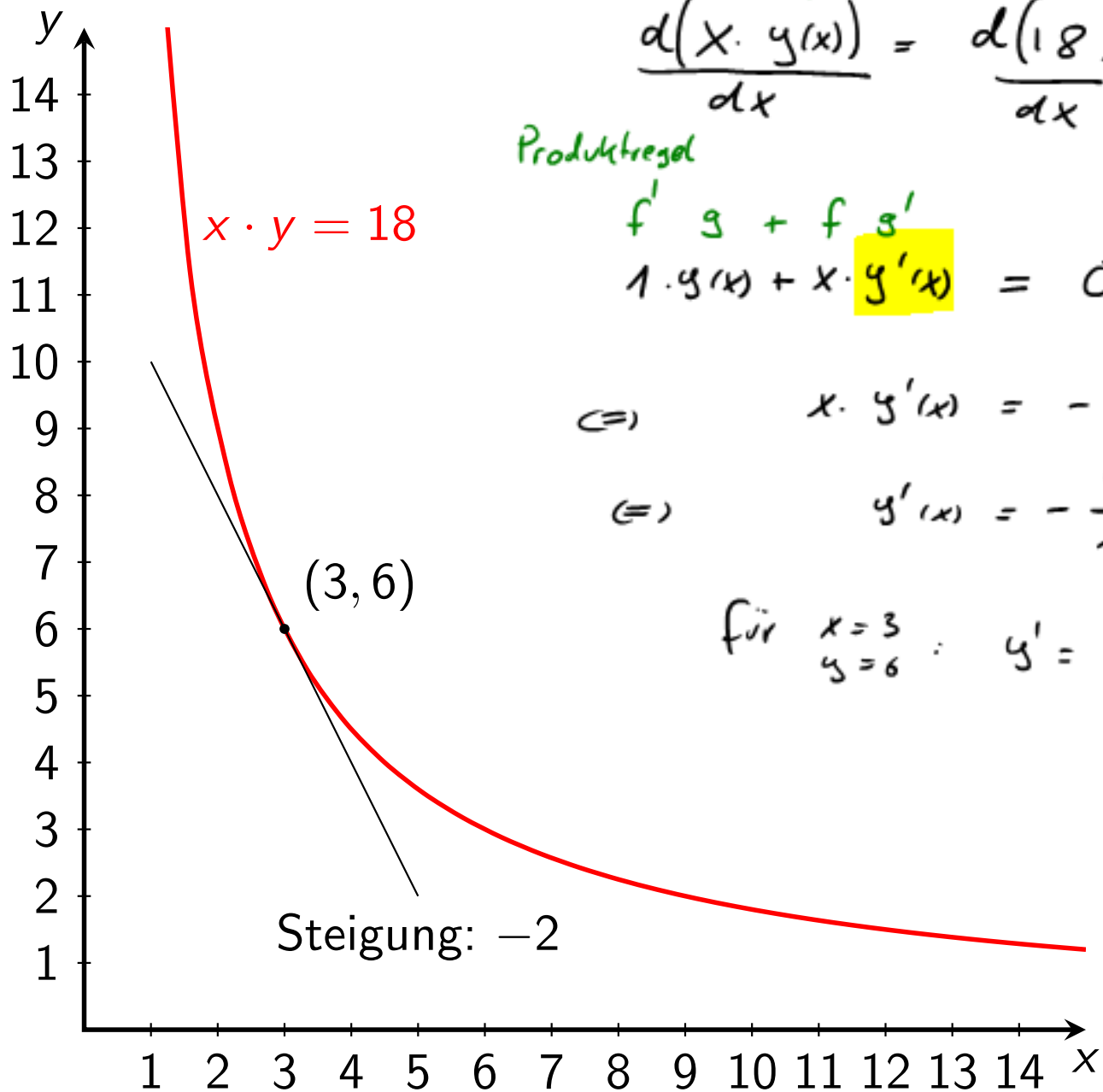
Notation:

$f(x)$ Funktion

Ableitung: $f'(x)$

alternativ: $\frac{df(x)}{dx}$

Beispiel: $x \cdot y = 18$ für $x > 0$



$x \cdot y = 18$

$\Leftrightarrow y = \frac{18}{x}$

$\Leftrightarrow y = 18 \cdot x^{-1}$

$\Rightarrow y' = 18 \cdot (-1) x^{-2}$

$= -18 \frac{1}{x^2}$

für $x = 3$:

$y' = -18 \frac{1}{3^2}$

$= -2$ ✓

$f(x)$ $g(x)$

$$\frac{d(x \cdot y(x))}{dx} = \frac{d(18)}{dx}$$

Produktregel

$f' g + f g'$

$1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = 0 \quad | -y(x)$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot y'(x) = -y(x) \quad | : x \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{y}{x}$

für $x = 3$, $y = 6$: $y' = -\frac{6}{3} = -2$ ✓

Beispiel: $\sqrt{y} = x$ für $x, y > 0$

äußere Funktion $f(y) = \sqrt{y}$

innere Fkt. $g(x) = y(x)$

$$\frac{d\left(\sqrt{y(x)}\right)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}$$

Kettenregel

$$\frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'(x) = 1 \quad | \cdot 2\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = 2\sqrt{y}$$

für $y = 4$: $y' = 2\sqrt{4}$

$= 4$ ✓

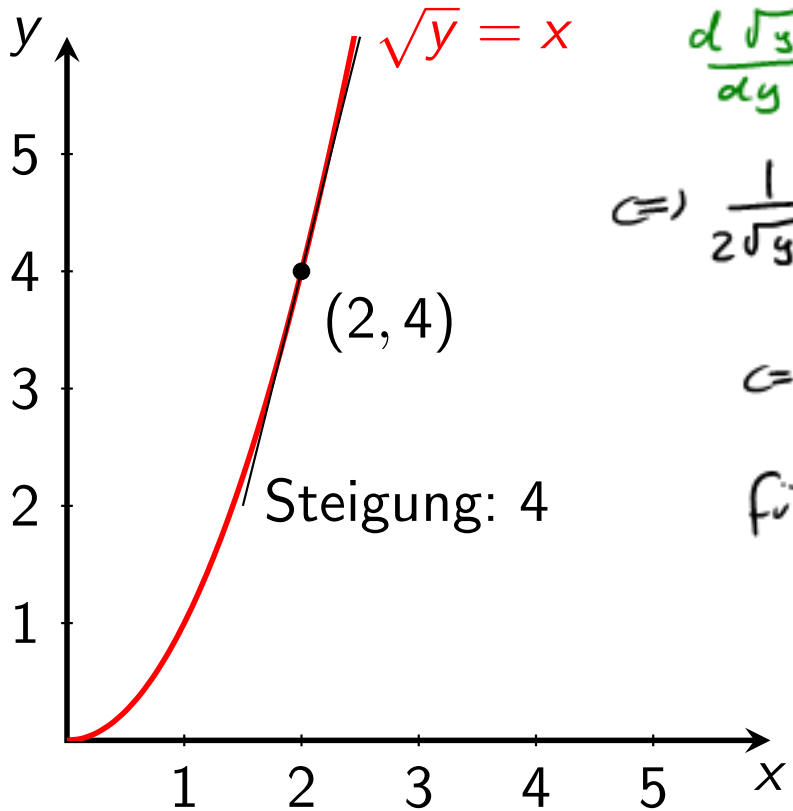
$\sqrt{y} = x$

$\Leftrightarrow y = x^2$

$y' = 2x$

für $x = 2$:

$y' = 2 \cdot 2 = 4$ ✓



Beispiel: $y^3 + 3x^2 \cdot y = 13$

$$\frac{d\left((y(x))^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y(x)\right)}{dx} = \frac{d(13)}{dx}$$

$$\frac{d\left((y(x))^3\right)}{dx} + \frac{d\left(3x^2 y(x)\right)}{dx} = 0$$

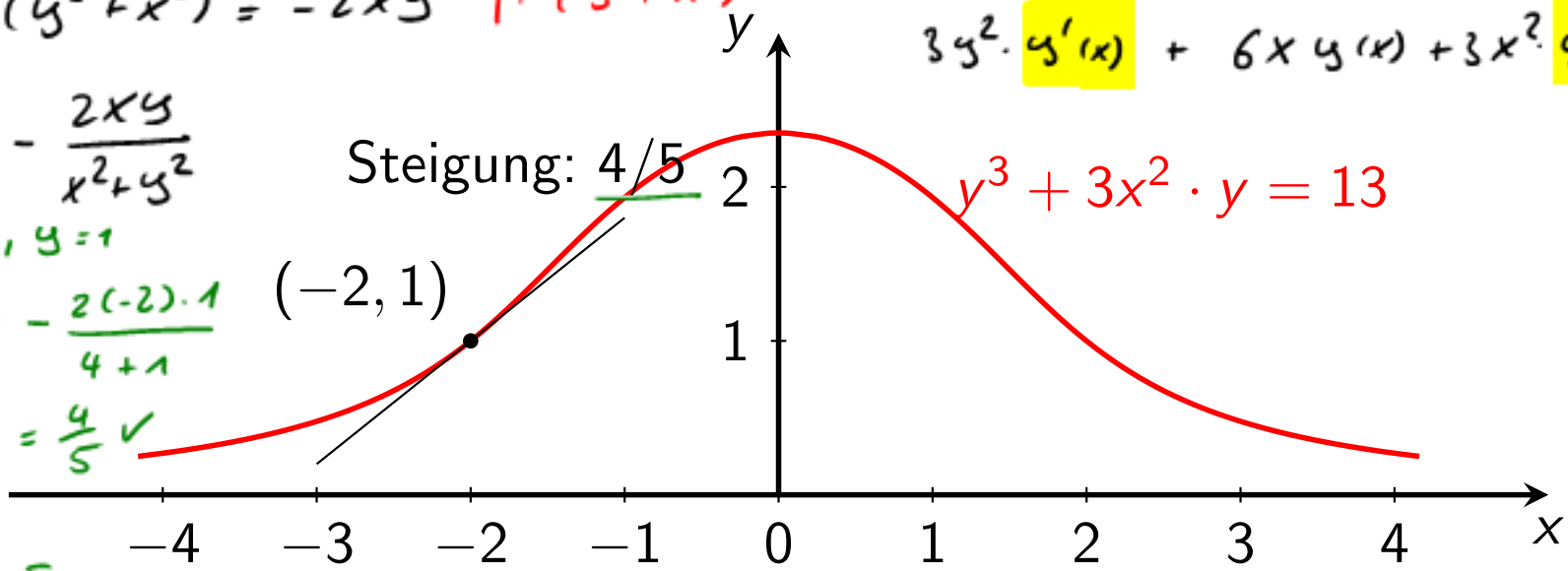
$$3y^2 \cdot y'(x) + 6x\,y(x) + 3x^2 \cdot y'(x) = 0$$

$$y'(x)\left(3y^2 + 3x^2\right) + 6x \cdot y = 0 \quad | :3$$

$$y'(x)\left(y^2 + x^2\right) + 2xy = 0 \quad | -2xy$$

$$y'(x)\left(y^2 + x^2\right) = -2xy \quad | : (y^2 + x^2)$$

$$y'(x) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$



Für $x = -2$, $y = 1$

$$y'(x) = -\frac{2(-2) \cdot 1}{4 + 1} = \frac{4}{5} \checkmark$$

äußere Funktion

$f(y) = y^3$

$f'(y)$

$$\frac{d\left((y(x))^3\right)}{dx} = 3y^2 \cdot y'(x)$$

innere Funktion

$g(x) = y(x)$

(Produktregel)

$$\frac{d\left(3 \cdot x^2 \cdot y(x)\right)}{dx} = 3 \cdot \left(2x \cdot y(x) + x^2 \cdot y'(x)\right)$$

7.3 Ableitung der Inversen

Sei f eine differenzierbare Funktion mit der inversen Funktion g.

Wenn für einen inneren Punkt x_0 gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$f(g(x)) = x$

$g(x) = y$

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{d(x)}{dx}$$

$$\frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy}}$$

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Es gelte $\overbrace{f(x)}^{y} = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x)$, $g(y)$ und $g'(y)$?

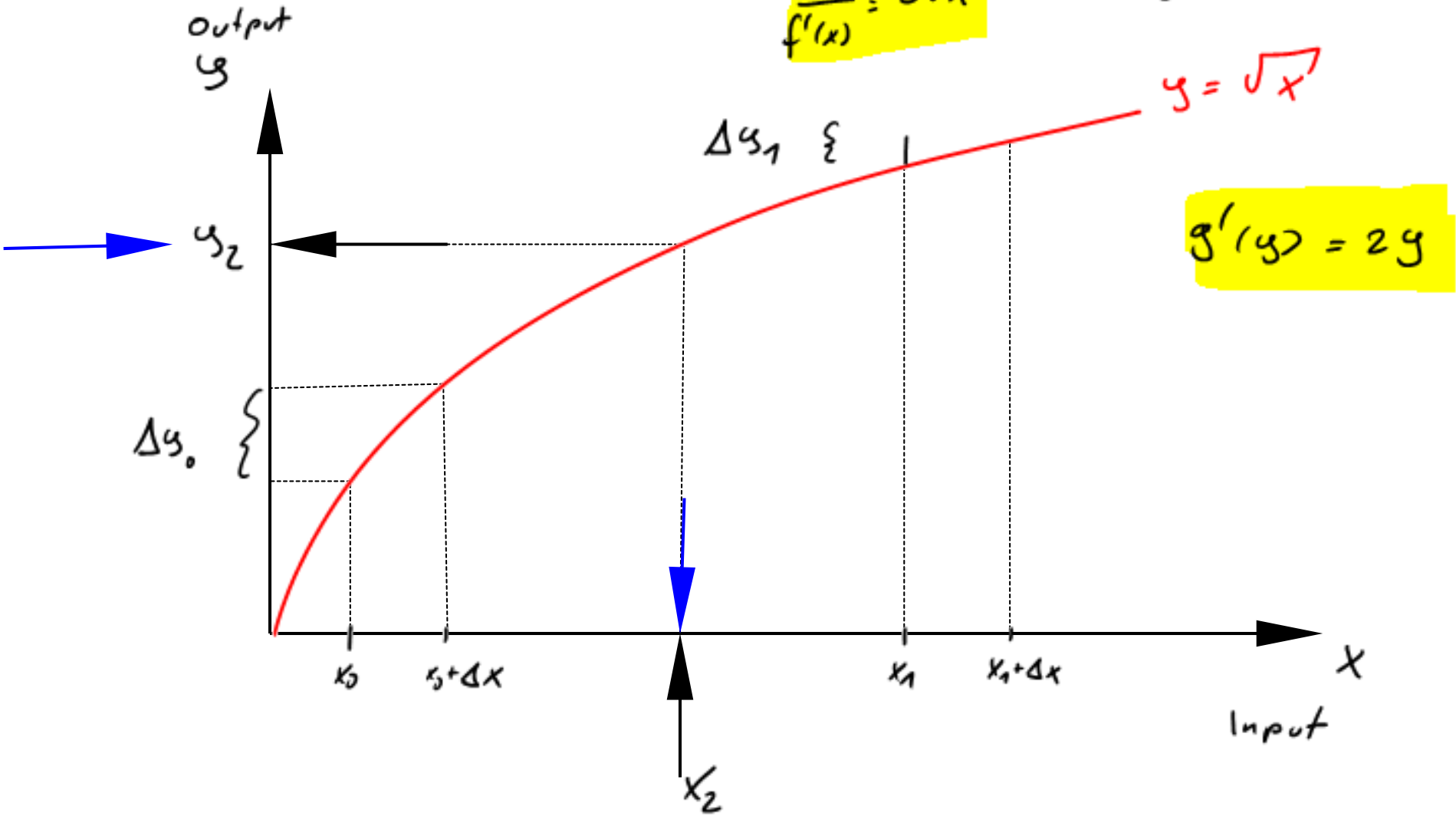
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(g(y)) = y$

$\sqrt{g(y)} = y$

$g(y) = y^2$

$\frac{1}{f'(x)} = 2\sqrt{x}$



$g'(y) = 2y$

7.4 Lineare Approximation

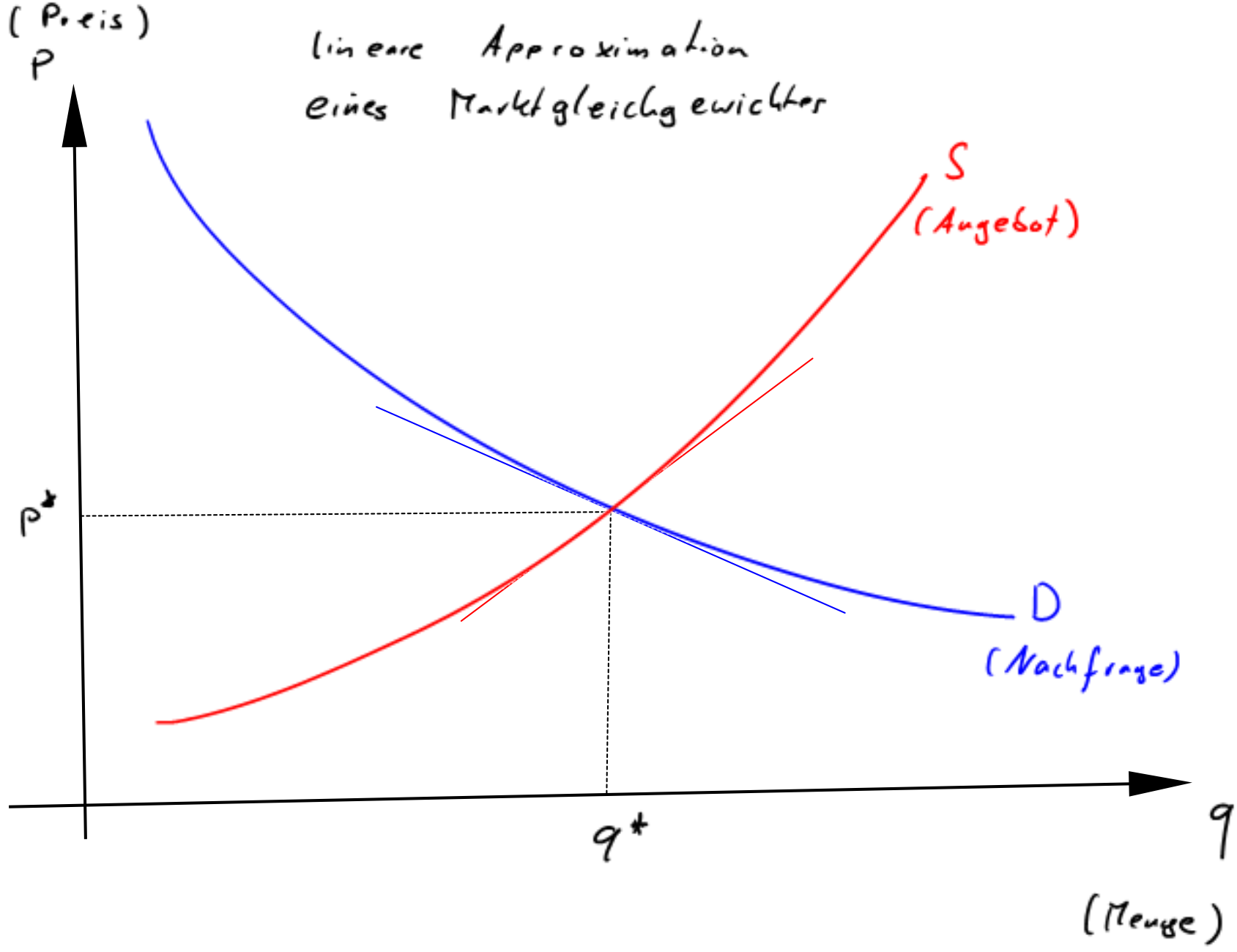
Gleichung der Tangente

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + f'(x_0) \cdot x$$

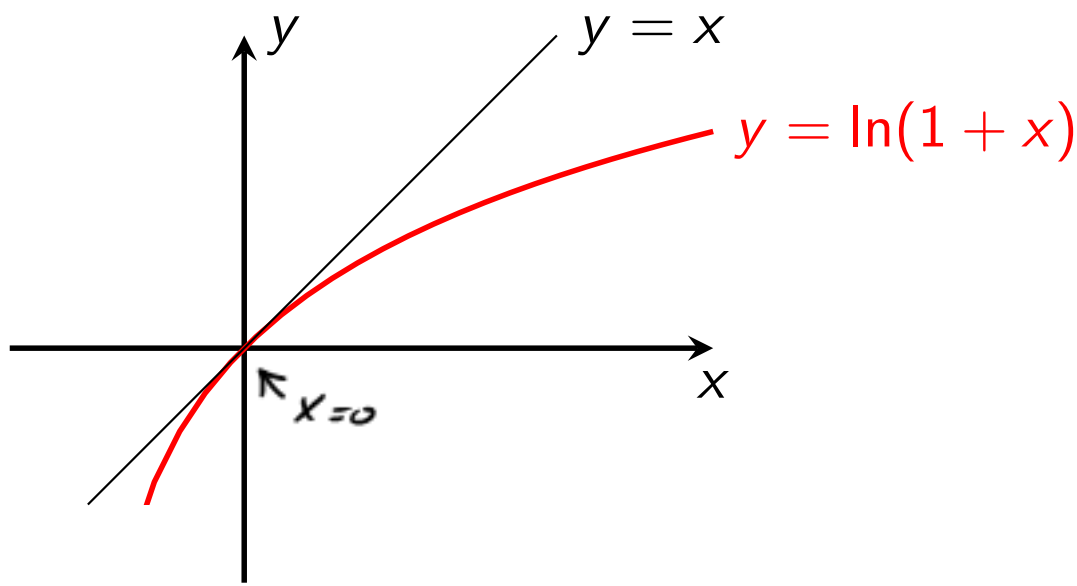
Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

(Siehe Gleichung einer Tangente.)


(Preis)
P
lineare Approximation
eines Marktgleichgewichtes
S
(Angebot)
D
(Nachfrage)
p*
q*
q
(Menge)

Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel: $f(x) = \ln(1 + x)$



Lineare Approximation: Übung

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Wie lautet die lineare Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe eines beliebigen Punktes $x_0 > -1$?

$$\ln(1+x) \approx \ln(1+x_0) + \overbrace{\frac{1}{1+x_0}}^{f'(x_0)} (x - x_0)$$

für $x_0 = 0$ $\quad \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}(x - 0)$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{=0} + x = x$$

$\ln(1+x) \approx x$ für x in der Nähe von 0.

Das Differential einer Funktion

Sei f eine differenzierbare Funktion und $dx \neq 0$ eine beliebige Änderung der Variablen x

Differential von $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$

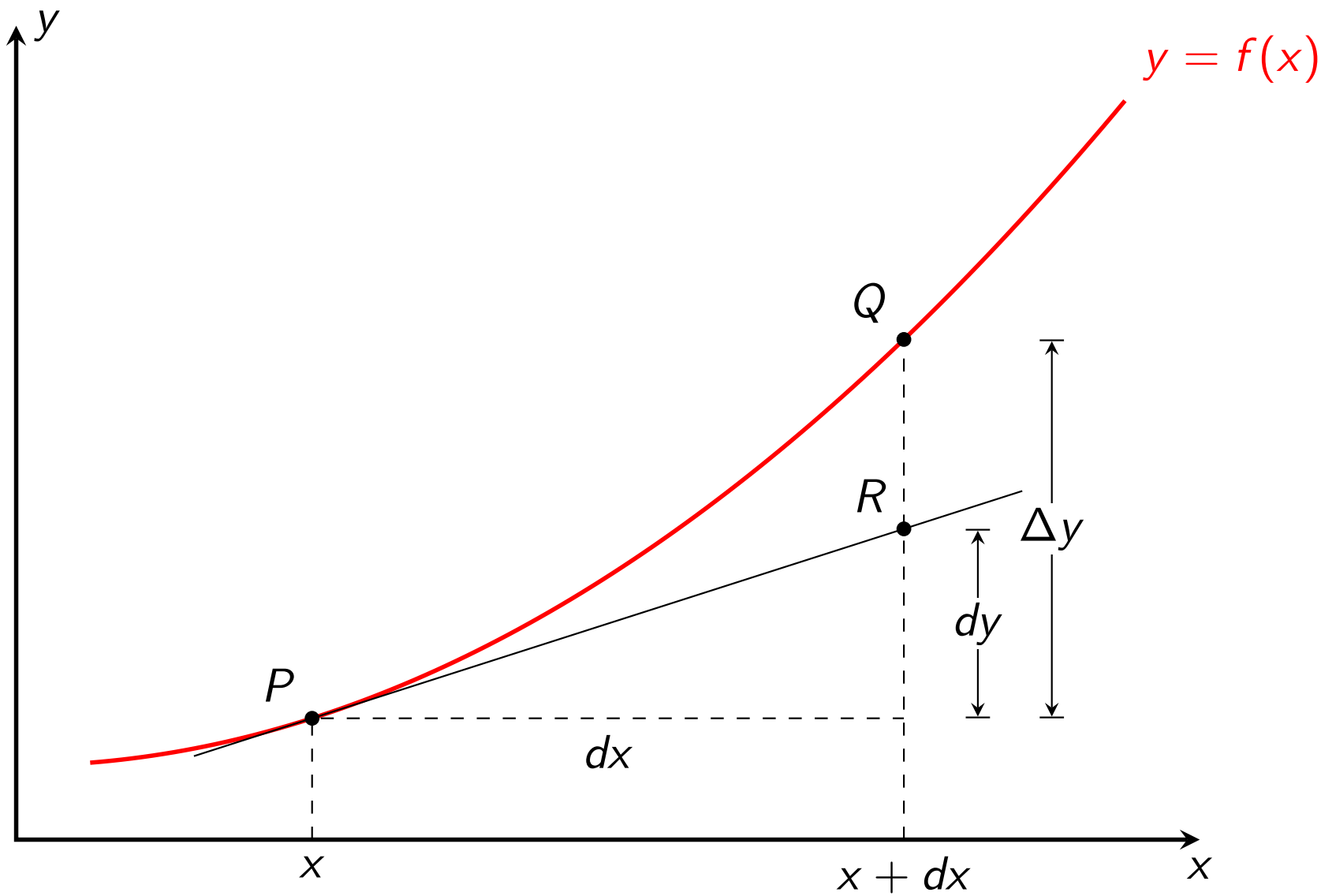
Differenz des Funktionswertes $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Für dx klein gilt

$$\Delta y \approx dy$$

Darstellung des Differentials dy und der Differenz Δy



Differenz und Differential: Übung

$dy = f'(x) \cdot dx$

Berechne das Differential dy und die Differenz Δy für folgende Funktion:

$$f(x) = 1 + x^2$$

Begründe, warum $dy \approx \Delta y$ für dx klein.

$dy = (1+x^2)' \cdot dx = 2x \cdot dx$

$\Delta y = f(x+dx) - f(x) = 1 + \overset{a}{(x} + \overset{b}{dx)^2} - (1 + x^2)$

$= 1 + x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2 - 1 - x^2$

$= \underbrace{2x \cdot dx}_{dy} + \underbrace{(dx)^2}_{dx \to 0} \to 0$

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Pause bis 11^{00}

$f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$

$= -\frac{1}{(1+x)^2}$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

lineare Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

dx , $(dx)^2$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

$\ln(1+x)$

1. Grades für $x_0 = 0$

$\ln(1+x) \approx x$

2. Grades

$$\ln(1+x) \approx x + \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{1}{(1+x_0)^2}\right)}_{f''(x_0)}(x - x_0)^2$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2$$

Quadratische Approximation: Übung

Wie lautet die quadratische Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe $x = x_0$?

7.7 Elastizitäten

gestern: $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von** f bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$%.

Beispiele

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

$El = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\rightsquigarrow$ $x \cdot \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ($f'(x)$ / $f(x)$)

  $= x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

  $= x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

- $g(x) = x^2$ $\rightsquigarrow$ $x \cdot \frac{2x}{x^2} = 2$ ✓

- $h(x) = Ax^r$

  ↳ $\frac{x \cdot r \cdot Ax^{r-1}}{Ax^r} = \frac{x \cdot r \cdot A \cdot x^r \cdot x^{-1}}{Ax^r} = \frac{x \cdot r \cdot Ax^r}{Ax^r} \cdot \frac{1}{x}$ ($f'(x)$ / $f(x)$)

  $= r$ ✓

Relative Änderungen

%-Änderung des Funktionswertes $f(x)$:

%-Änderung der Variablen x :

Rate der relativen Änderungen:

$$\frac{\%\text{-Änderung } f(x)}{\%\text{-Änderung } x} =$$

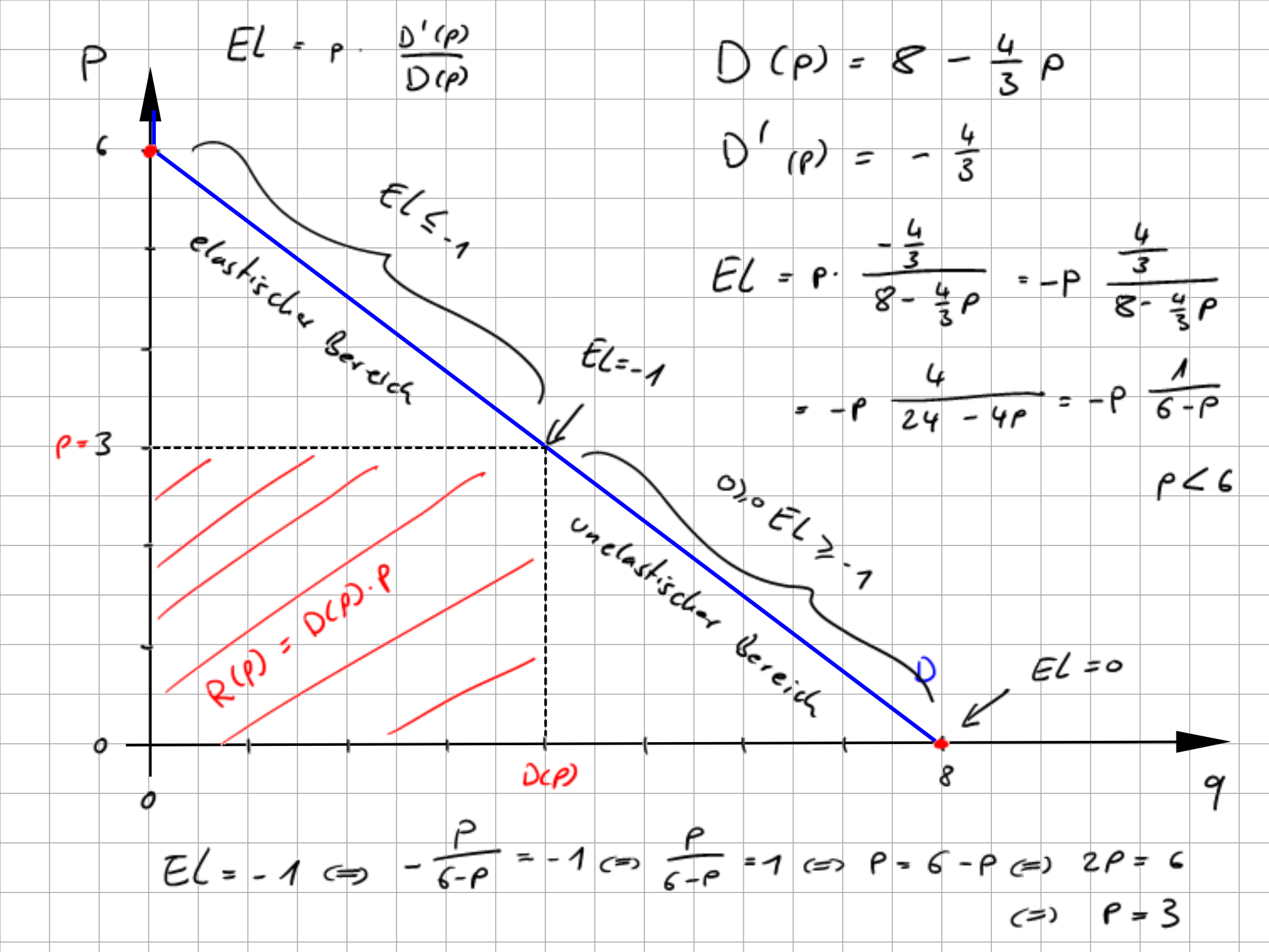
Falls dx klein: $\Delta f \approx df$ und

$$\frac{\%\text{-Änderung } f(x)}{\%\text{-Änderung } x} \approx$$

Preiselastizität der Nachfrage: Übung

$$D(p) = \begin{cases} 8 - \frac{4}{3}p & \text{falls } p < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne den Graph von D in ein Diagramm.
   Trage hierbei den Preis auf der vertikalen Achse ein.
2. Berechne die Elastizität von D für $0 \leq p < 6$
3. Kennzeichne die Bereiche $El_p D(p) < -1$ und $El_p D(p) > -1$.


p
$El = p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}$
$D(p) = 8 - \frac{4}{3}p$
$D'(p) = -\frac{4}{3}$
$El = p \cdot \frac{-\frac{4}{3}}{8 - \frac{4}{3}p} = -p \frac{\frac{4}{3}}{8 - \frac{4}{3}p}$
$= -p \frac{4}{24 - 4p} = -p \frac{1}{6 - p}$
$p < 6$
6
$El \leq -1$
elastischer Bereich
$El = -1$
p = 3
$0 > El \geq -1$
unelastischer Bereich
D
$El = 0$
$R(p) = D(p) \cdot p$
0
D(p)
8
q
0
$El = -1 \Leftrightarrow -\frac{p}{6-p} = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{6-p} = 1 \Leftrightarrow p = 6 - p \Leftrightarrow 2p = 6$
$\Leftrightarrow p = 3$

Elastizität eines Produktes von Funktionen

Die Elastizität eines Produktes von Funktionen ist die Summe der Elastizitäten der Funktionen:

$$(f(x)g(x))' \frac{x}{f(x)g(x)} = \underbrace{f'(x)\frac{x}{f(x)}}_{El\, f} + \underbrace{g'(x)\frac{x}{g(x)}}_{El\, g}$$

Preiselastizität des Erlöses

Sei $R(p) = \overbrace{D(p)}^{f}\overbrace{p}^{g}$ der Erlös.

Die Elastizität der Erlösfunktion $R(p)$ bezüglich des Preises p ist:

$$El_p R(p) = \frac{dR(p)}{dp}\frac{p}{R(p)} = \frac{d\,D(p)}{dp}\cdot\frac{p}{D(p)} + \underbrace{\frac{d\,(p)}{dp}}_{=1}\cdot\frac{p}{p}$$

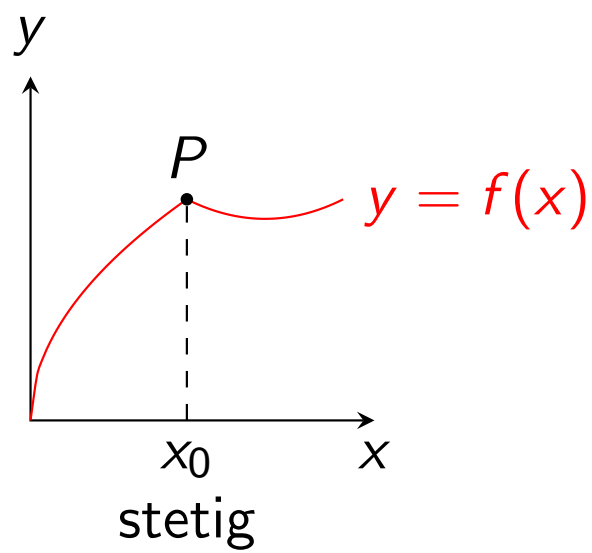
Wann ist die Elastizität des Erlöses gleich null?

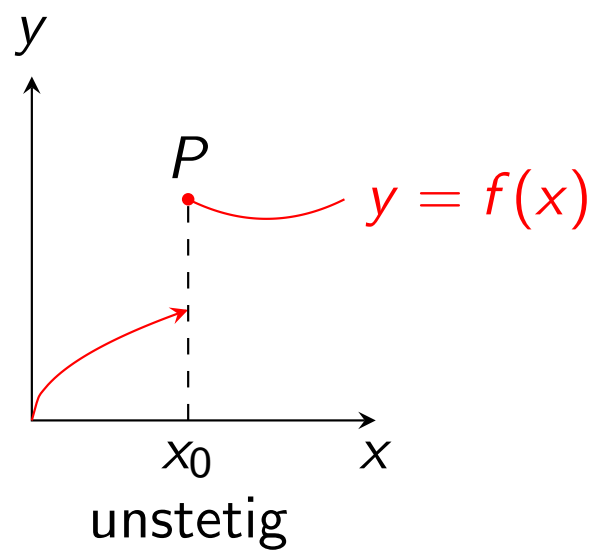
$$EL_p\,R(p) = \underbrace{D'(p)\cdot\frac{p}{D(p)}}_{EL_p\,D(p)} + 1 = 0 \Leftrightarrow EL_p D(p) = -1$$

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$





Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g, falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0.

(c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0, falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

Stetigkeit: Übung

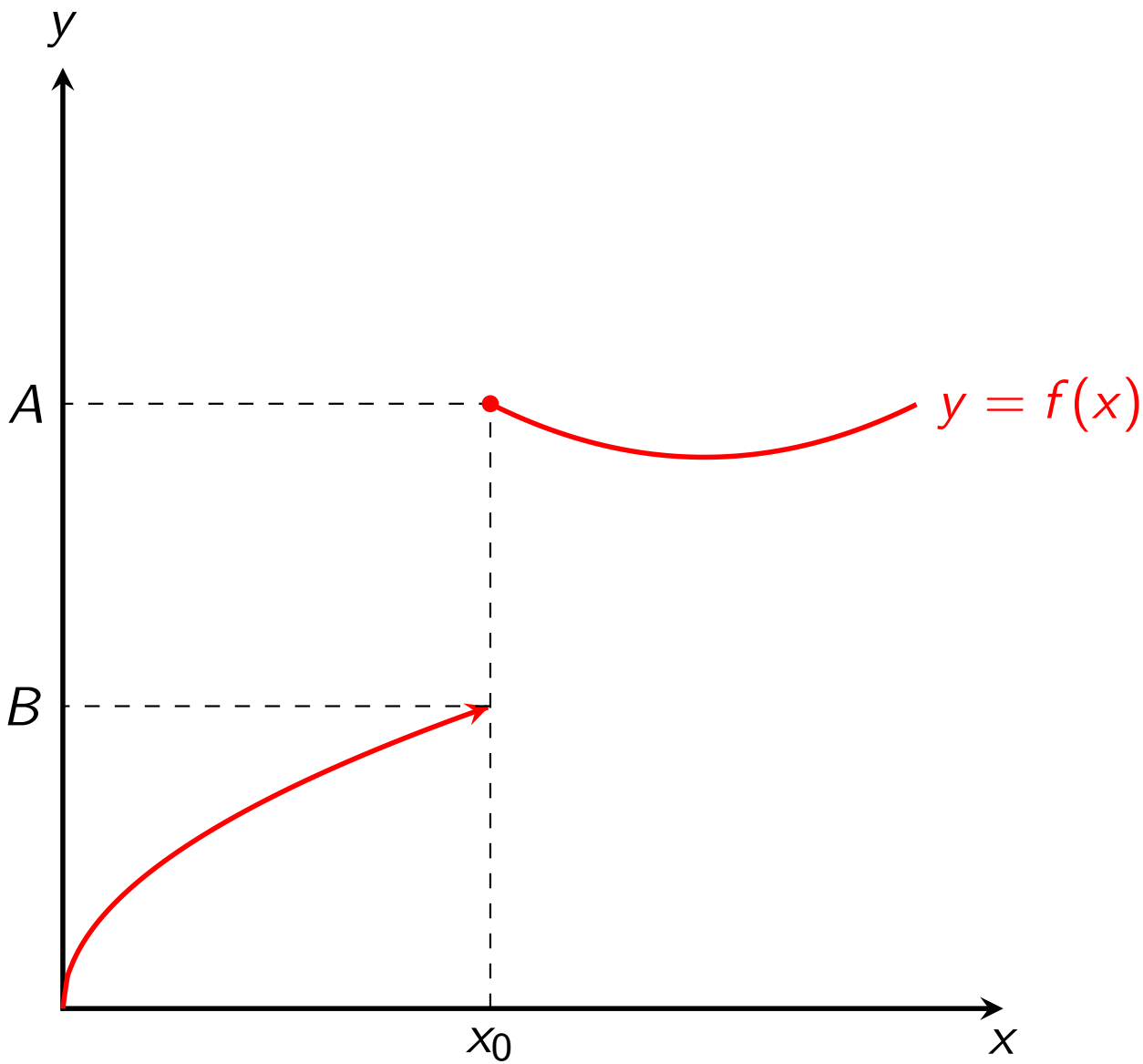
Welche der drei folgenden Funktionen ist/sind stetig?

$$f(x) = x^2 - 1 + 4\sqrt{x} - (1+x)^2,\ x \geq 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 0{,}7 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

7.9 Mehr über Grenzwerte: Fehlender Grenzwert



Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B, wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A, wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} A$$

Einseitige Stetigkeit

Sei f eine Funktion deren Definitionsbereich ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A, wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

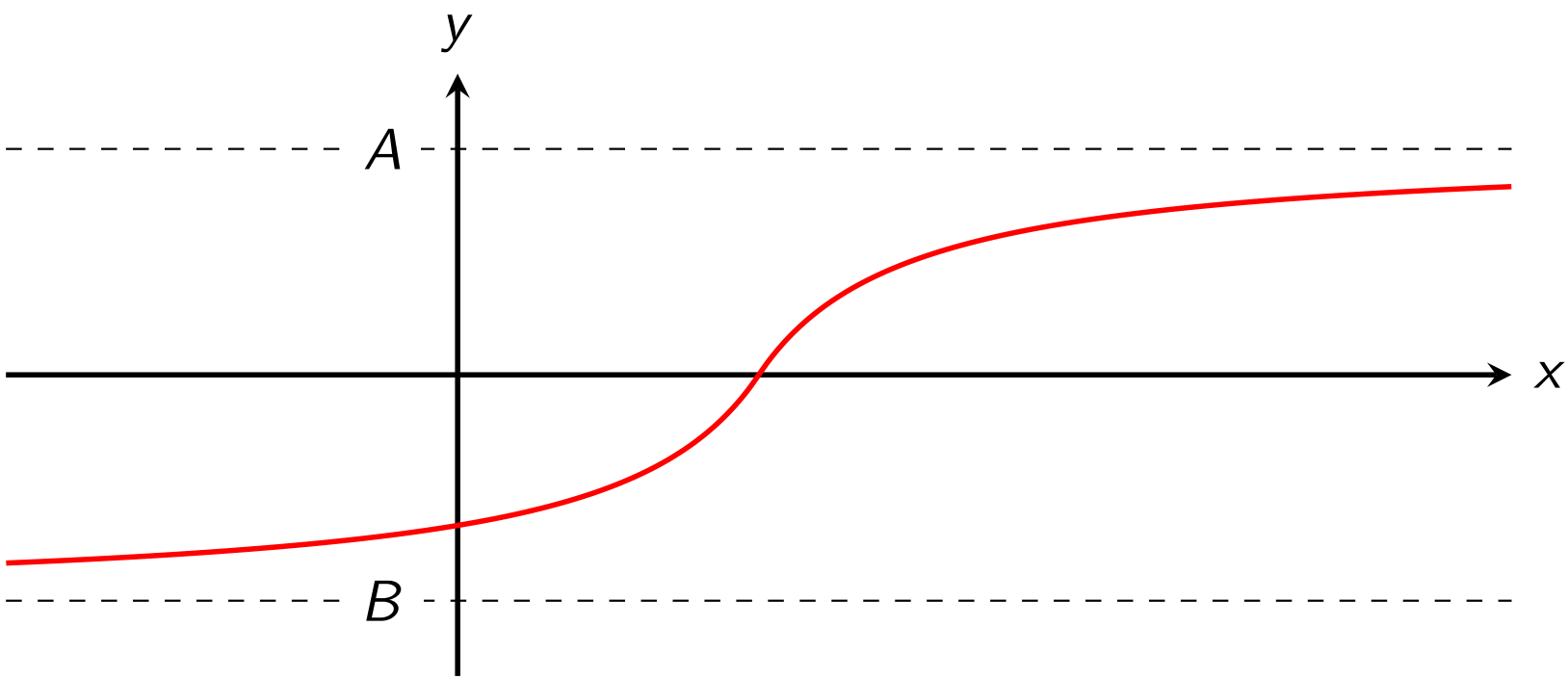
Notation:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} A$$

Analog:

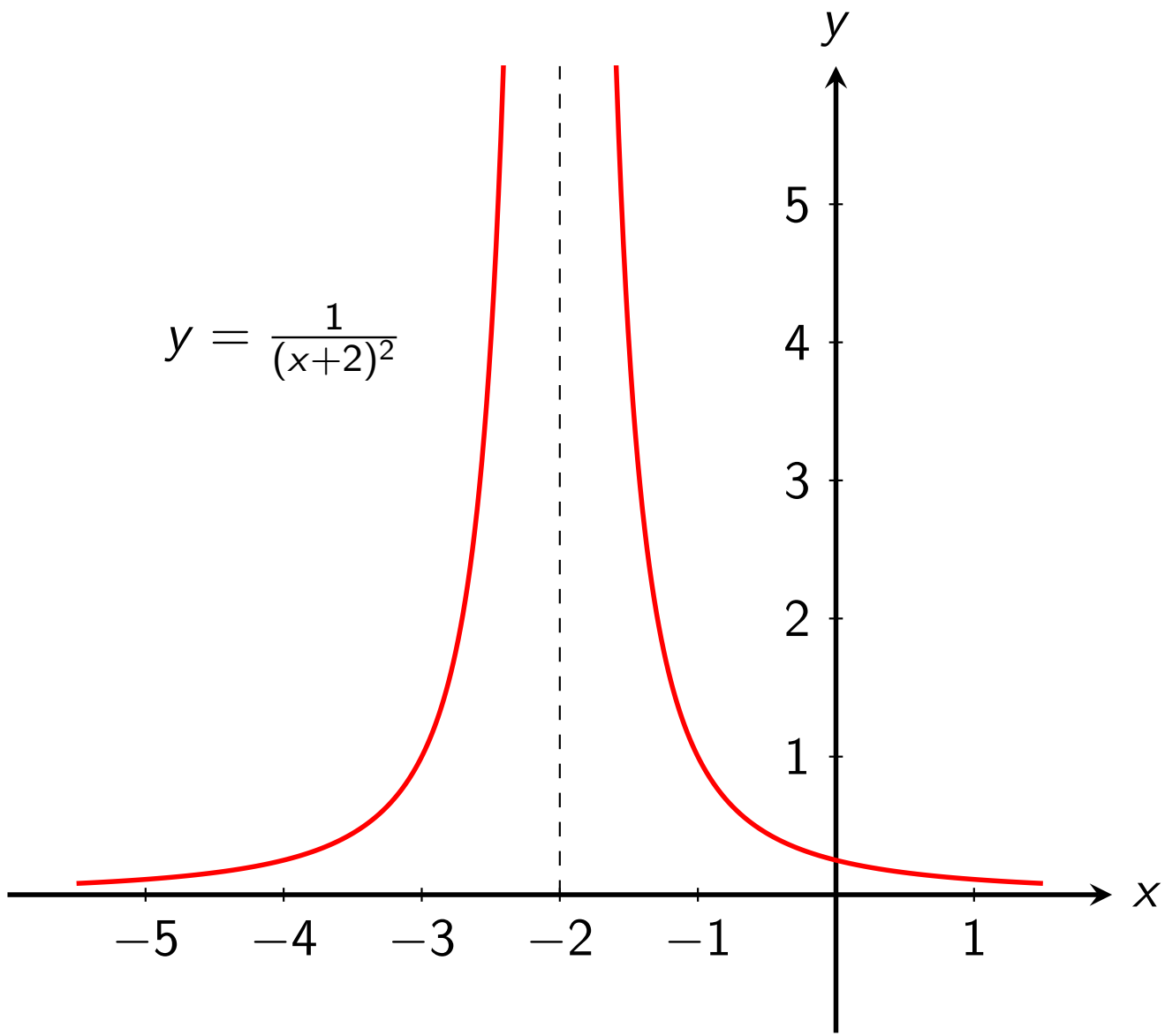
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} B$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \to -\infty} f(x) = B$$

Uneigentlicher Grenzwert: vertikale Asymptote



Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Falls die Funktionswerte von f und g mit $x \to x_0$ gegen unendlich streben, schreiben wir $f(x), g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Dann gilt:

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ und } f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ mit } x \to x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \to x_0$.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.

Beispiel:

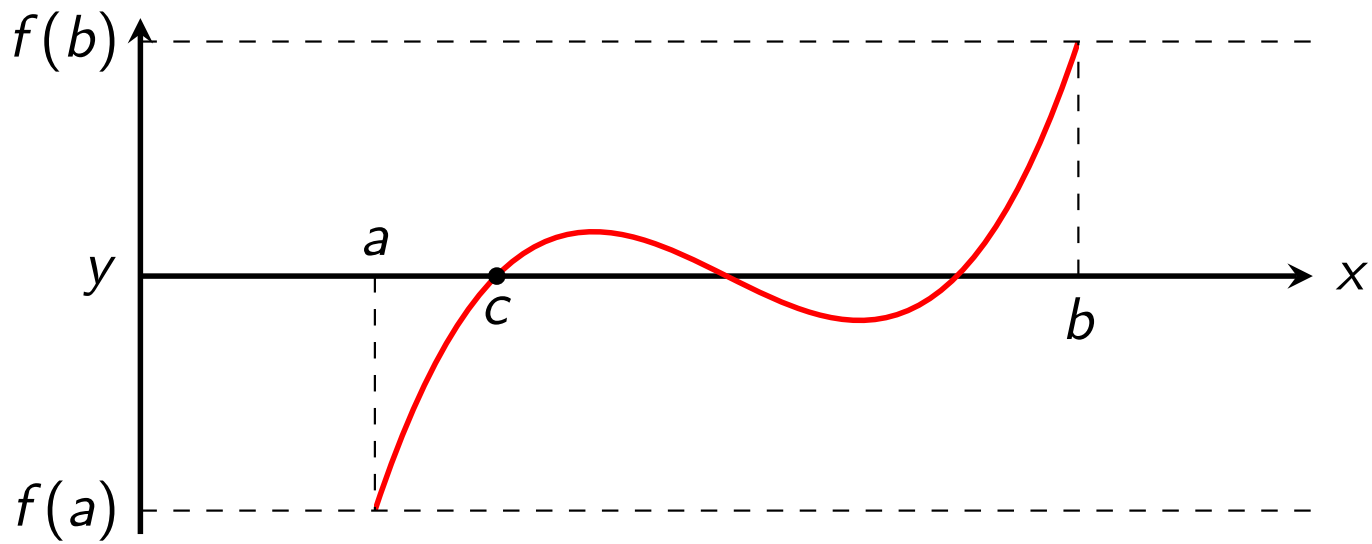
Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien f und g zwei stetige Funktionen mit $g(x_0) = 0$ für ein x_0.

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

Regel von L'Hôpital

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Zusammenfassung

- Implizites Differenzieren
- Ableitung der Inversen
- Approximation
- Elastizitäten
- Stetigkeit
- Zwischenwertsatz
- L'Hôpital