

Differentialrechnung



Moodle

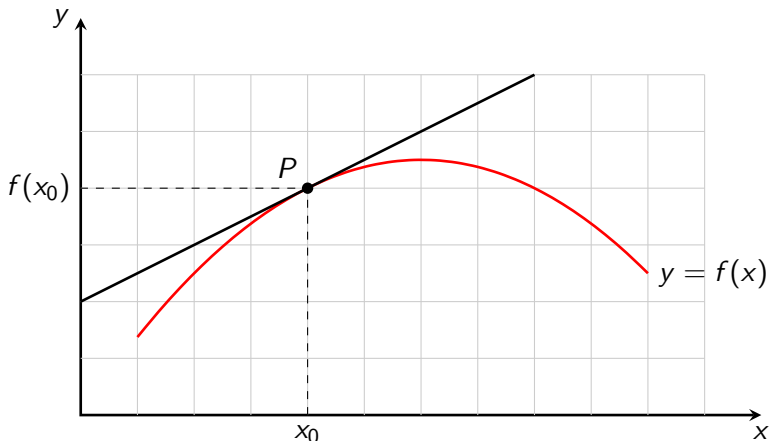


Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

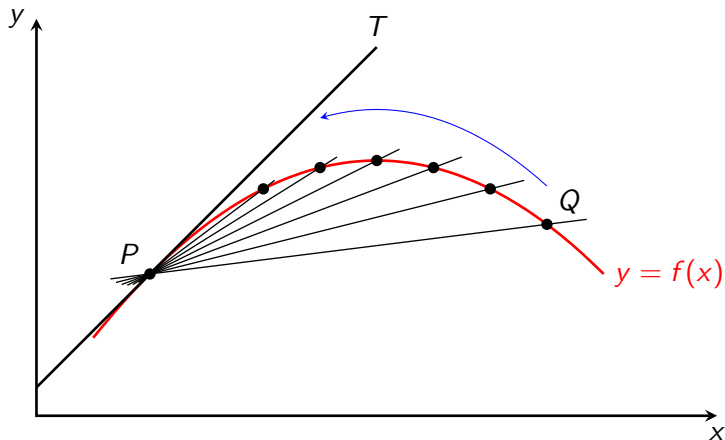
- 6.1 Steigungen von Kurven
- 6.2 Tangenten und Ableitungen
- 6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen
- 6.4 Ökonomische Anwendungen
- 6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten
- 6.6 Einfache Regeln der Differentiation
- 6.7 Summen, Produkte und Quotienten
- 6.8 Kettenregel
- 6.9 Ableitungen höherer Ordnung
- 6.10 Exponentialfunktion
- 6.11 Logarithmusfunktion

6.1 Steigungen von Kurven



Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0 , wir bezeichnen diese Zahl mit $f'(x_0)$.

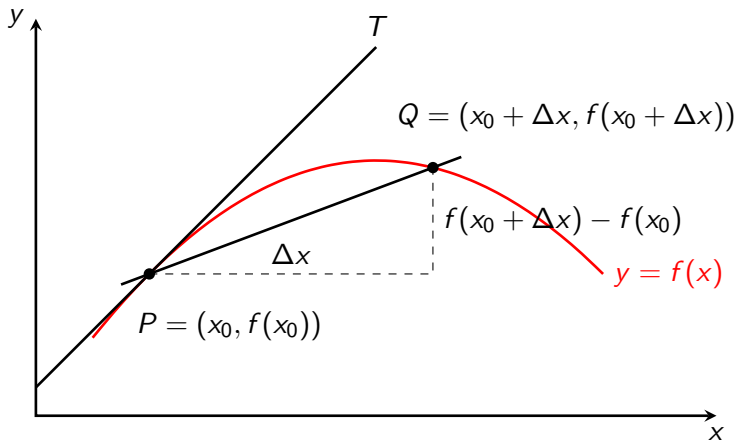
6.2 Tangenten und Ableitungen: Geometrische Idee



Steigung der Tangente T :

Grenzwert der Steigung der Sekante $\overline{PQ}$ wenn sich Q auf dem Graphen zu P bewegt.

Newton-Quotient / Differenzen-Quotient



Steigung von $\overline{PQ}$: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Definition: Ableitung

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 , die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Der Ausdruck $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ bedeutet „**Grenzwert für Δx gegen null**“.

Wir werden diesen Grenzwert später genauer definieren.

Die Funktion f besitzt nur dann eine Ableitung, bzw. ist nur dann **differenzierbar**, falls dieser Grenzwert existiert.

Definition der Tangente

Die Geradengleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + f'(x_0) \cdot x$$

Begründung:

Beispiel: $f(x) = x^2 \rightarrow$ Berechnung von $f'(x_0)$

Berechne:

$$f(x_0 + \Delta x) =$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

Ersetze Δx durch 0.

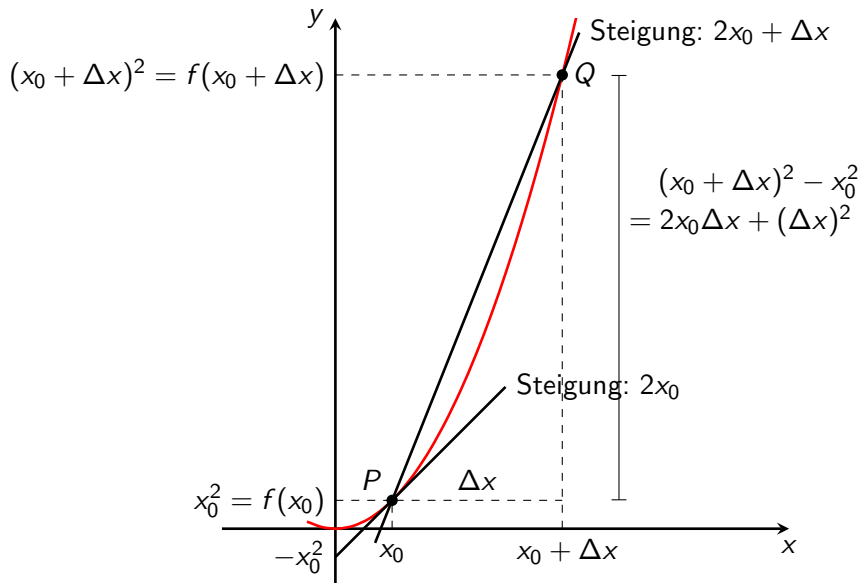
Ableitung von f :

$$f'(x_0) =$$

Geradengleichung der Tangente:

$$y =$$

Beispiel $f(x) = x^2$



Berechnung der Ableitung

- (i) Addiere $\Delta x \neq 0$ zu x_0 und berechne $f(x_0 + \Delta x)$.
- (ii) Berechne die zugehörige Änderung im Funktionswert:
 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- (iii) Bilde für $\Delta x \neq 0$ den Differenzen-Quotienten.
- (iv) Vereinfache den Bruch aus Schritt (iii) so weit wie möglich.
- (v) Dann ist $f'(x_0)$ diejenige Zahl, gegen die der Differenzen-Quotient strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

Beispiel: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

Wie lautet die Geradengleichung der Tangente?

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

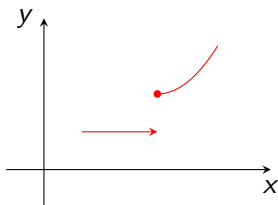
Falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

- ▶ $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann ist f **monoton wachsend**
- ▶ $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton wachsend**
- ▶ $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann ist f **monoton fallend**
- ▶ $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton fallend**

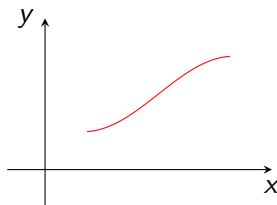
auf dem Intervall $[a, b]$.

Beispiele

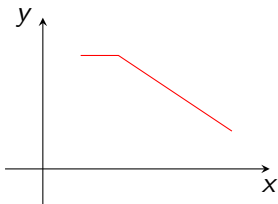
monoton wachsend



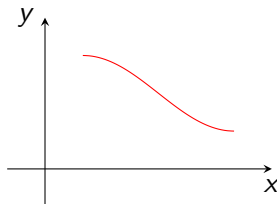
streng monoton wachsend



monoton fallend



streng monoton fallend



Ist $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ monoton wachsend oder fallend?

Jeweils in welchem Bereich?

Monotonie und Vorzeichen der Ableitung

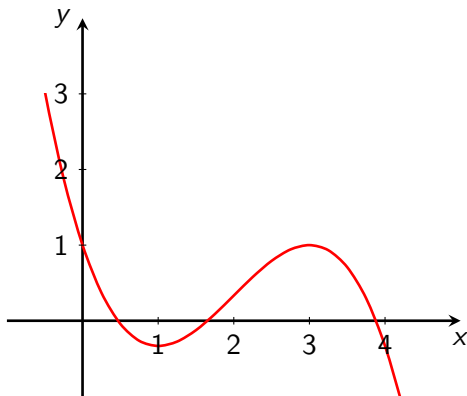
Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Ableitung f' und sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Dann gilt:

- ▶ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
- ▶ $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ strikt monoton wachsend
- ▶ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ monoton fallend
- ▶ $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ strikt monoton fallend
- ▶ $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ konstant

auf dem Intervall $[a, b]$.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$



6.4 Ökonomische Anwendungen

Durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x_0 bis $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Änderungsrate von f in x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Relative Änderungsrate von f an der Stelle x_0 :

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{1}{f(x_0)}$$

Beispiel 6.4.4: Grenzkosten

Sei die Kostenfunktion C monoton wachsend und differenzierbar.

Grenzkosten an der Stelle x :

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls $|\Delta x|$ sehr klein im Vergleich zu x :

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls x sehr groß und $\Delta x = 1$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

Sei f eine Funktion.

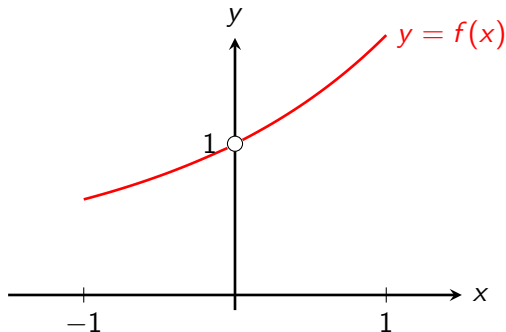
Der Ausdruck

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

heißt **Grenzwert** von f für x gegen x_0 .

Er bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x nah genug an x_0 , aber nicht notwendig gleich x_0 .

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000
x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1.718	1.052	1.001	1.000

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Regeln für Grenzwerte

Es seien f und g zwei Funktionen.

Wenn die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren, dann gilt:

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^r) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^r, \text{ für } r \in \mathbb{R}$$

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0:

$$f(x) = A \text{ für alle } x \Rightarrow f'(x) = 0$$

Additive Konstanten verschwinden beim Ableiten:

$$(A + f(x))' = f'(x)$$

Multiplikative Konstanten bleiben erhalten:

$$(Af(x))' = Af'(x)$$

Für eine beliebige reelle Konstante r gilt:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

Ableitung der Wurzel

Wie lautet der Differenzenquotient für $f(x) = \sqrt{x}$?

Benutze die dritte binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ um den Differenzenquotienten zu vereinfachen!

6.7 Ableitungen von Summen und Differenzen

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide in $x \in D$ differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Beispiel: Gewinn

Es seien $R(x)$ der Erlös und $C(x)$ die Kosten einer Firma bei gegebener Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

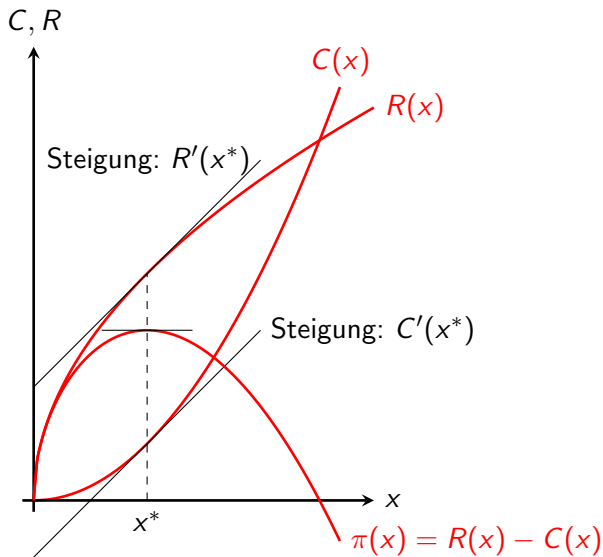
Der Gewinn der Firma sei definiert durch:

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

Der **Grenzwinn** der Firma ist dann:

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Insbesondere ist der Grenzwinn gleich null genau dann wenn der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht.



6.7 Produktregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6.7 Quotientenregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Wenn $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar in x und es gilt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6.8 Kettenregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch die Verkettung $f \circ g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Beispiel: optimale Konsumententscheidung

Die Konsumententscheidung $x \geq 0$ für ein Gut hänge vom verfügbaren Einkommen $m \geq 0$ ab

→ Funktion $x(m)$

Das verfügbare Einkommen $m \geq 0$ hänge vom Lohnsatz $\omega \geq 0$ ab

→ Funktion $m(\omega)$

Dies ergibt die verkettete Funktion $x(m(\omega))$.

Mit der Kettenregel können wir berechnen, wie sich der Konsum x ändert, falls sich der Lohnsatz ω ändert:

$$(x(m(\omega)))' = x'(m) \cdot m'(\omega)$$

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung f' wird auch **erste Ableitung** genannt.

Wird die Ableitungsfunktion f' erneut abgeleitet, heißt das Resultat **zweite Ableitung**: $f'' = (f')'$.

$f''(x)$ ist dann die zweite Ableitung an der Stelle x .

Alternative Notation:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$$

Dritte und höhere Ableitungen

Dritte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y''' = f'''(x)$$

Vierte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

n -te Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

6.10 Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \approx 2.71828^x, x \in \mathbb{R}$$

Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wir hatten zuvor argumentiert: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Überblick: Natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x) = e^x \quad (e = 2.71828\dots)$$

ist differenzierbar und strikt monoton wachsend.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x > 0$$

und:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad e^0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

6.11 Logarithmusfunktion - Ableitung

Wir leiten beide Seiten der Gleichung

$$e^{\ln(y)} = y$$

nach y ab.

Ableitung linke Seite: Kettenregel

- ▶ innere Funktion: $g(y) = \ln(y) \Rightarrow g'(y) = \ln'(y)$.
- ▶ äußere Funktion: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Anwendung der Kettenregel auf der linken Seite ergibt:

$$\left(e^{\ln(y)}\right)' = e^{\ln(y)} \cdot \ln'(y)$$

Die Ableitung der rechten Seite der Gleichung lautet $(y)' = 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\ln(y)}}_{=y} \cdot \ln'(y) = 1 \Leftrightarrow \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Zusammenfassung

- ▶ Differenzen-Quotient
- ▶ Monotonie
- ▶ Grenzwerte
- ▶ Ableitungsregeln
- ▶ natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion