

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch

☐

Ja

Nein

☐

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 15 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren Sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich Ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren Sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten Sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren Sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten Sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten Sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 27 von maximal 45 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒

Korrektur: ☐

Korrekturhinweis: Wenn Sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen Sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen Sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 15	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Die Gleichung

$$x \cdot y = 18$$

definiert eine Kurve in der x - y -Ebene.

Wie lautet die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(x_0, y_0) = (3, 6)$?

- a) $\frac{dy}{dx} = 2$
- b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$
- c) $\frac{dy}{dx} = -6$
- d) $\frac{dy}{dx} = -2$

Aufgabe 2 zu Kapitel 7 Anwendungen der Differentialrechnung

Wie lautet die lineare Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ für x nahe $x_0 = 0$?

- a) $f(x) \approx x$
- b) $f(x) \approx 1 + x$
- c) $f(x) \approx -1 + x$
- d) $f(x) \approx \ln(x)$

Aufgabe 3 zu Kapitel 8 Konkave und konvexe Funktionen

Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beliebige stetige Funktionen, wobei der Definitionsbereich D konvex sei.

Welche Aussage ist in Bezug auf das Maximum oder Minimum von f und g richtig?

- a) Sind f und g konkav, so ist $\min\{f, g\}$ konkav.
- b) Sind f und g konvex, so ist $\min\{f, g\}$ konvex.
- c) Sind f und g konvex, so ist $\max\{f, g\}$ nicht konvex.
- d) Sind f und g konkav, so ist $\max\{f, g\}$ konkav.

Aufgabe 4 zu Kapitel 9 Optimierung

Welche Bedingung ist hinreichend dafür, dass die stationäre Stelle x_0 von einer zweimal differenzierbaren Funktion f eine Minimumstelle ist?

- a) $f''(x) \leq 0$ für alle x .
- b) $f''(x) < 0$ für alle x .
- c) $f''(x) \geq 0$ für alle x .
- d) $f'(x_0) \neq 0$.

Aufgabe 5 zu Kapitel 10 Integration

Welche Aussage zu grundlegenden Integrationsregeln ist **falsch**?

a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int f(x) \cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

c) $\int a f(x)dx = a \int f(x)dx$

d) $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Aufgabe 6 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Welche Bedingung ist notwendig dafür, dass zwei Matrizen **A** und **B** addiert werden können?

- a) **A** muss quadratisch sein.
- b) **B** muss eine Einheitsmatrix sein.
- c) Die Anzahl der Spalten von **A** muss gleich der Anzahl der Zeilen von **B** sein.
- d) **A** und **B** müssen die gleiche Ordnung haben.

Aufgabe 7 zu Kapitel 12 Matrizenalgebra

Wie ist das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ definiert?

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$

b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$

c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n.$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$

Aufgabe 8 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Die Matrix **A** sei gegeben durch:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Determinante von **A**?

- a) $|\mathbf{A}| = 0$
- b) $|\mathbf{A}| = -12$
- c) $|\mathbf{A}| = 12$
- d) $|\mathbf{A}| = 6$

Aufgabe 9 zu Kapitel 13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- a) Eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist positiv definit, wenn $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt.
- b) Eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist negativ definit, wenn $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt.
- c) Eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist indefinit, wenn $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.
- d) Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt quadratische Form, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, sodass $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 10 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Die Funktion f sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch:

$$f(x, y) = 2x + x^2y^3$$

Wie lautet die partielle Ableitung der Funktion f nach x ?

- a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2.$
- b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 + 2xy^3.$
- c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 + 3x^2y^2.$
- d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + x^2y^3.$

Aufgabe 11 zu Kapitel 14 Funktionen mehrerer Variablen

Welche Matrix ist die Hessematrix einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$?

a) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} f'_1(x, y) \\ f'_2(x, y) \end{pmatrix}.$

b) $f''(x, y) = (x \ y).$

c) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) & 0 \\ 0 & f(x, y) \end{pmatrix}.$

d) $f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}.$

Aufgabe 12 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Welche Formel gilt beim impliziten Differenzieren entlang einer Höhenlinie $f(x, y) = c$, falls $f'_2(x, y) \neq 0$?

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}.$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_2(x, y)}{f'_1(x, y)}.$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}.$

d) $\frac{dy}{dx} = f'_1(x, y) + f'_2(x, y).$

Aufgabe 13 zu Kapitel 15 Partielle Ableitungen im Einsatz

Welche der folgenden Aussagen ist in Bezug auf eine quadratische Form $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$ ist, richtig?

- a) Der Gradient lautet $\nabla f(x) = Ax$ und die Hessematrix lautet $f''(x) = A$.
- b) Der Gradient lautet $\nabla f(x) = x'Ax$ und die Hessematrix lautet $f''(x) = x$.
- c) Quadratische Formen besitzen keinen Gradienten.
- d) Der Gradient lautet $\nabla f(x) = (A' + A)x$ und die Hessematrix lautet $f''(x) = A' + A$.

Aufgabe 14 zu Kapitel 17 Optimierung ohne Nebenbedingungen

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.

Es bezeichne $x^*(r)$ die eindeutige und innere Lösung des Problems

$$\max_x f(x, r)$$

und es bezeichne $f^*(r) = f(x^*(r), r)$ die Optimalwertfunktion.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) $\frac{df^*}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$

b) $\frac{df^*}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x}$

c) $\frac{df^*}{dr} = x^*(r)$

d) $\frac{df^*}{dr} = 0$

Aufgabe 15 zu Kapitel 18 Nebenbedingungen in Gleichheit

Welche Lagrangefunktion gehört zu folgendem Problem?

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \text{bzw.} \quad \min_{x,y} f(x,y) \quad \text{unter der Bedingung } g(x,y) = c$$

- a) $\mathcal{L}(x,y) = g(x,y) - \lambda(f(x,y) - c).$
- b) $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c).$
- c) $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + g(x,y) + c.$
- d) $\mathcal{L}(x,y) = \lambda f(x,y) - g(x,y).$

Lösung zu Aufgabe 1

Gesucht ist die Steigung der Tangente an die durch $x \cdot y = 18$ definierte Kurve im Punkt $(x_0, y_0) = (3, 6)$.
Wir differenzieren die Gleichung implizit nach x :

$$x \cdot y = 18.$$

Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = \frac{d}{dx}(18).$$

Also:

$$1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Daraus folgt:

$$x \frac{dy}{dx} = -y.$$

Somit gilt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Im Punkt $(3, 6)$ erhalten wir:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3,6)} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Damit ist die Steigung der Tangente gleich -2 .

Richtige Antwort: d)

Lösung zu Aufgabe 2

Gesucht ist die lineare Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ für x nahe $x_0 = 0$.
Die lineare Approximation einer Funktion f um x_0 lautet:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Hier gilt:

$$f(x) = e^x.$$

Also ist:

$$f'(x) = e^x.$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(0) = e^0 = 1$$

und

$$f'(0) = e^0 = 1.$$

Einsetzen in die Formel der linearen Approximation liefert:

$$f(x) \approx 1 + 1 \cdot (x - 0).$$

Damit:

$$f(x) \approx 1 + x.$$

Die lineare Approximation von e^x nahe $x_0 = 0$ lautet also $1 + x$.

Richtige Antwort: b)

Lösung zu Aufgabe 3

Gesucht ist die richtige Aussage über das Maximum oder Minimum zweier Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem konvexen Definitionsbereich D .

Eine bekannte Eigenschaft konkaver Funktionen lautet:

$$f \text{ konkav und } g \text{ konkav} \implies \min\{f, g\} \text{ konkav.}$$

Daher ist Aussage a) richtig:

$$\text{Sind } f \text{ und } g \text{ konkav, so ist } \min\{f, g\} \text{ konkav.}$$

Die Aussage d) ist im Allgemeinen falsch, denn das Maximum zweier konkaver Funktionen muss nicht konkav sein.

Die Aussage b) ist im Allgemeinen falsch, denn das Minimum zweier konvexer Funktionen muss nicht konvex sein.

Die Aussage c) ist falsch, denn das Maximum zweier konvexer Funktionen ist konvex.

Damit ist genau Aussage a) korrekt.

Richtige Antwort: a)

Lösung zu Aufgabe 4

Gesucht ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine stationäre Stelle x_0 einer zweimal differenzierbaren Funktion f eine Minimumstelle ist.

Eine stationäre Stelle erfüllt:

$$f'(x_0) = 0.$$

Wenn zusätzlich gilt:

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x,$$

dann ist f konvex.

Für eine konvexe Funktion ist jede stationäre Stelle eine Minimumstelle.

Daher ist die Bedingung

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x$$

hinreichend dafür, dass x_0 eine Minimumstelle ist.

Die Bedingungen $f''(x) \leq 0$ oder $f''(x) < 0$ sprechen dagegen für Konkavität und damit bei einer stationären Stelle für ein Maximum.

Die Bedingung $f'(x_0) \neq 0$ widerspricht sogar der Stationarität von x_0 .

Richtige Antwort: c)

Lösung zu Aufgabe 5

Gesucht ist die falsche Aussage zu grundlegenden Integrationsregeln.

Die Linearität des Integrals besagt:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

und

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

Außerdem darf ein konstanter Faktor vor das Integral gezogen werden:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx,$$

wobei a eine Konstante ist.

Für Produkte gilt jedoch im Allgemeinen nicht:

$$\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$$

Diese Gleichung ist keine gültige allgemeine Integrationsregel.

Damit ist Aussage b) die falsche Aussage.

Richtige Antwort: b)

Lösung zu Aufgabe 6

Gesucht ist die notwendige Bedingung dafür, dass zwei Matrizen A und B addiert werden können. Matrizenaddition ist nur definiert, wenn beide Matrizen dieselbe Ordnung besitzen.

Das bedeutet: Haben A und B die Ordnung $m \times n$, dann ist

$$A + B$$

ebenfalls eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Die Addition erfolgt komponentenweise:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Eine Matrix muss für die Addition nicht quadratisch sein.

Eine Matrix muss für die Addition auch keine Einheitsmatrix sein.

Die Bedingung, dass die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist, gehört zur Matrizenmultiplikation, nicht zur Matrizenaddition.

Damit müssen A und B dieselbe Ordnung haben.

Richtige Antwort: d)

Lösung zu Aufgabe 7

Gesucht ist die Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$.
Das Skalarprodukt zweier n -Vektoren ist definiert durch:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

In Summenschreibweise lautet dies:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Das Ergebnis des Skalarprodukts ist eine Zahl, also ein Skalar.

Antwort c) ist nur die Summe aller Komponenten und nicht das Skalarprodukt.

Antwort b) beschreibt die komponentenweise Addition zweier Vektoren und liefert wieder einen Vektor.

Antwort d) multipliziert die Komponenten in umgekehrter Reihenfolge und ist nicht die Standarddefinition des Skalarprodukts.

Damit ist Antwort a) korrekt.

Richtige Antwort: a)

Lösung zu Aufgabe 8

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für eine 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

lautet die Determinante:

$$|A| = ad - bc.$$

Hier ist:

$$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 1, \quad d = 3.$$

Also ergibt sich:

$$|A| = 2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1.$$

Damit:

$$|A| = 6 + 6 = 12.$$

Die Determinante der Matrix ist also 12.

Richtige Antwort: c)

Lösung zu Aufgabe 9

Gesucht ist die richtige Aussage zu quadratischen Formen und Definitheit.

Eine Funktion

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt quadratische Form, wenn eine Matrix A der Ordnung $n \times n$ existiert, sodass

$$Q(x) = x'Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Damit ist Aussage d) korrekt.

Eine Matrix A heißt positiv definit, wenn

$$x'Ax > 0$$

für alle $x \neq 0$ gilt.

Aussage a) ist daher falsch, weil dort $x'Ax < 0$ steht.

Eine Matrix A heißt negativ definit, wenn

$$x'Ax < 0$$

für alle $x \neq 0$ gilt.

Aussage b) ist daher falsch, weil dort $x'Ax > 0$ steht.

Eine Matrix ist indefinit, wenn es Vektoren x und y gibt, sodass

$$x'Ax > 0 \quad \text{und} \quad y'Ay < 0.$$

Aussage c) ist daher ebenfalls falsch.

Richtige Antwort: d)

Lösung zu Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2x + x^2y^3.$$

Gesucht ist die partielle Ableitung von f nach x .

Beim partiellen Ableiten nach x wird y als konstant behandelt.

Wir leiten die beiden Terme einzeln nach x ab:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2.$$

Für den zweiten Term gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = 2xy^3,$$

weil y^3 beim Ableiten nach x als Konstante behandelt wird.

Damit folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 + 2xy^3.$$

Die gesuchte partielle Ableitung ist also $2 + 2xy^3$.

Richtige Antwort: b)

Lösung zu Aufgabe 11

Gesucht ist die Hessematrix einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Bei einer Funktion zweier Variablen gibt es vier zweite partielle Ableitungen:

$$f''_{11}(x, y), \quad f''_{12}(x, y), \quad f''_{21}(x, y), \quad f''_{22}(x, y).$$

Diese werden in der Hessematrix angeordnet:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Antwort a) ist der Gradient beziehungsweise ein Vektor erster partieller Ableitungen und nicht die Hessematrix.

Antwort b) ist nur ein Zeilenvektor mit den Variablen x und y .

Antwort c) ist eine spezielle Diagonalmatrix und nicht allgemein die Hessematrix von f .

Damit ist Antwort d) korrekt.

Richtige Antwort: d)

Lösung zu Aufgabe 12

Gesucht ist die Formel für implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie $f(x, y) = c$, falls $f'_2(x, y) \neq 0$.
Entlang der Höhenlinie gilt:

$$f(x, y) = c.$$

Da c konstant ist, ergibt die Ableitung nach x :

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = 0.$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$f'_1(x, y) + f'_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun lösen wir nach $\frac{dy}{dx}$ auf:

$$f'_2(x, y)\frac{dy}{dx} = -f'_1(x, y).$$

Da $f'_2(x, y) \neq 0$ gilt, dürfen wir durch $f'_2(x, y)$ teilen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}.$$

Damit ist die gesuchte Formel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}.$$

Richtige Antwort: c)

Lösung zu Aufgabe 13

Gegeben ist eine quadratische Form

$$f(x) = x'Ax,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und A eine Matrix der Ordnung $n \times n$ ist.

Für eine quadratische Form gilt allgemein:

$$\nabla f(x) = (A' + A)x.$$

Außerdem gilt für die Hessematrix:

$$f''(x) = A' + A.$$

Wenn A symmetrisch ist, vereinfacht sich dies zu $\nabla f(x) = 2Ax$ und $f''(x) = 2A$, aber im Allgemeinen muss die Formel mit $A' + A$ verwendet werden.

Antwort a) wäre nur unter zusätzlichen Annahmen und selbst dann nicht in dieser Form allgemein korrekt.

Antwort b) ist falsch, weil $x'Ax$ ein Skalar ist und nicht der Gradient.

Antwort c) ist falsch, weil quadratische Formen sehr wohl einen Gradienten besitzen.

Damit ist Antwort d) korrekt.

Richtige Antwort: d)

Lösung zu Aufgabe 14

Gegeben ist ein Optimierungsproblem der Form

$$\max_x f(x, r),$$

wobei x die Entscheidungsvariable und r ein Parameter ist.

Die eindeutige und innere Lösung sei $x^*(r)$.

Die Optimalwertfunktion ist definiert durch:

$$f^*(r) = f(x^*(r), r).$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}.$$

Da $x^*(r)$ eine innere Lösung des Maximierungsproblems ist, gilt die Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0.$$

Damit verschwindet der erste Term:

$$\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} = 0.$$

Somit bleibt:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}.$$

Dies ist die Aussage des Envelope-Theorems.

Richtige Antwort: a)

Lösung zu Aufgabe 15

Gesucht ist die Lagrangefunktion zum Problem

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \text{bzw.} \quad \min_{x,y} f(x,y) \quad \text{unter der Bedingung } g(x,y) = c.$$

Bei einer Gleichheitsnebenbedingung $g(x,y) = c$ wird ein Lagrange-Multiplikator λ eingeführt.
Die Nebenbedingung kann in der Form

$$g(x,y) - c = 0$$

geschrieben werden.

Die Lagrangefunktion lautet nach der hier verwendeten Konvention:

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c).$$

Für alle zulässigen Punkte (x,y) mit $g(x,y) = c$ gilt:

$$g(x,y) - c = 0.$$

Daher gilt an zulässigen Punkten:

$$L(x,y) = f(x,y).$$

Die Antwortmöglichkeiten a), c) und d) entsprechen nicht der angegebenen Lagrangefunktion für dieses Problem.

Damit ist Antwort b) korrekt.

Richtige Antwort: b)

Lösungsschlüssel

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antwort	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>