Übung 4 zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

9.3 Ökonomische Beispiele

Aufgabe 9.3 von Seite 421:
Aufgabe 9.4 von Seite 421:
Aufgabe 9.5 von Seite 421:

9.4 Extremwertsatz

Aufgabe 9.4.1 von Seite 406

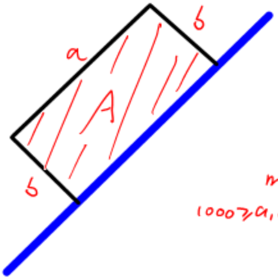
9.6 Lokale Extremstellen

Aufgabe 9.6.5 von Seite 420

Aufgabe 9.3 von Seite 421:

Ein Bauer hat 1000 Meter Zaun zur Verfügung um eine rechteckige Einzäunung vorzunehmen. Eine der Seiten ist ein gerades Flussufer, so dass an dieser Seite kein Zaun benötigt wird.

Wie lang sollten die Seiten gewählt werden, um die Fläche zu maximieren?



$$A = a \cdot b$$

$$a + 2b = 1000$$

$$\Rightarrow b = 500 - \tfrac{1}{2}a$$

$$\max_{1000 \geq a, b \geq 0} a \cdot b \quad \text{u.d.B.} \quad a + 2b = 1000$$

$$\Leftrightarrow \max_{1000 \geq a \geq 0} a \cdot \left(500 - \tfrac{1}{2}a\right) = \tfrac{1}{2}a(1000 - a)$$

Zielfunktion

$$A(a) = \frac{1}{2} a \cdot (1000 - a) = \frac{1}{2} a \cdot 1000 - \frac{1}{2} a^2$$

Definitionsbereich : $[0, 1000]$

$$A'(a) = \frac{1}{2} 1 \cdot (1000 - a) + \frac{1}{2} a \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{2} 1000 - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}(1000 - 2a)$$

BEO : $A'(a) \overset{!}{=} 0$

$$\frac{1}{2}(1000 - 2a) = 0 \iff 1000 = 2a$$

$$\iff a = 500 \quad \text{innerer Punkt.}$$

$$A''(a) = -2 < 0 \text{ für alle } 0 \leq a \leq 1000$$

$a^* = 500$ ist eine eindeutige Maximumstelle.

$\longrightarrow b^* = 500 - \frac{1}{2} a^* = 250$

Aufgabe 9.4 von Seite 421:

Durch die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten eines Gutes erzielt ein Unternehmen den Gesamterlös $R(Q) = -0.0016Q^2 + 44Q$ und hat dabei die Kosten $C(Q) = 0.0004Q^2 + 8Q + \underbrace{64000}_{\text{Fixkosten}}$.

a) Welches Produktionsniveau maximiert den Gewinn?

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$= -0.0016Q^2 + 44Q - 0.0004Q^2 - 8Q - 64000$$

$$= -0.002Q^2 + 36Q - 64.000$$

$$\pi'(Q) = -0.004Q + 36 \overset{!}{=} 0 \iff 0.004Q = 36 \qquad \frac{4}{1000}$$

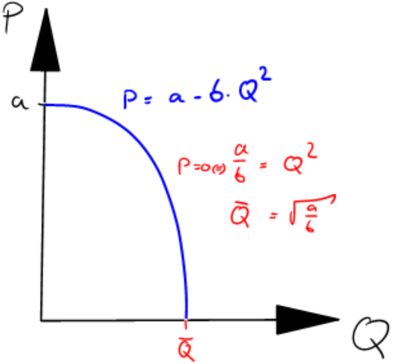
$$\iff Q^* = 36 \cdot \frac{1000}{4} = 9000$$

$$\pi''(Q) = -0.004 < 0 \Rightarrow Q^* = 9000 \text{ eindeutiges Max.}$$

Aufgabe 9.5 von Seite 421:

Der Preis P, der pro Einheit aus der Produktion und dem Verkauf von $Q \geq 0$ Einheiten erzielt wird, ist $P = a - bQ^2$. Die Kosten für die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten sind $C = \alpha + \beta Q$. Alle Konstanten sind positiv mit $a > \beta$.

Bestimme den Wert von Q, der den Gewinn maximiert.



$P = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = Q^2$

$\bar{Q} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Fixkosten

$C(Q) = \alpha + \beta Q$

$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

$R(Q) = P(Q) \cdot Q$

$= (a - bQ^2)\, Q$

$= aQ - bQ^3$

$\Pi(Q) = aQ - bQ^3 - \alpha - \beta Q$

$$\pi(Q) = aQ - bQ^3 - \alpha - \beta Q = \underbrace{(a-\beta)}_{>0} Q - bQ^3 - \alpha$$

$$= \underbrace{Q\left[a-\beta - bQ^2\right]}_{>0 \text{ für } 0 < Q \leq \bar{Q}} - \alpha$$

$$\pi'(Q) = a - \beta - 3bQ^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a - \beta = 3\underbrace{b}_{>0} Q^2$$

$$\Leftrightarrow \quad Q^2 = \frac{a-\beta}{3b}$$

$$\Rightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{a-\beta}{3b}} > 0$$

$$\pi''(Q) = -6b \cdot Q < 0 \text{ für alle } Q > 0$$

π ist streng konkav auf $(0, \bar{Q}]$ $\quad \bar{Q} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

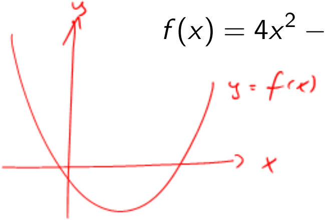
$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{a-\beta}{3b}}$ eindeutiges Max auf $(0, \bar{Q}]$

$\hat{Q} = 0$ Max-Stelle? $\quad \pi(\hat{Q} = 0) = -\alpha$

Aufgabe 9.4.1 von Seite 406

Bestimme das Maximum und das Minimum und zeichne den Graphen von

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80, \text{ für } x \in [0, 8].$$



Max-Stelle.

$$f(0) = 4 \cdot 0^2 - 40 \cdot 0 + 80 = 80$$

$$f(8) = 4 \cdot 8^2 - 40 \cdot 8 + 80 = 8[4 \cdot 8 - 40 + 10] = 8[32 - 30] = 16$$

$$= 4(x^2 - \overset{2\cdot 5}{10}x + 20)$$

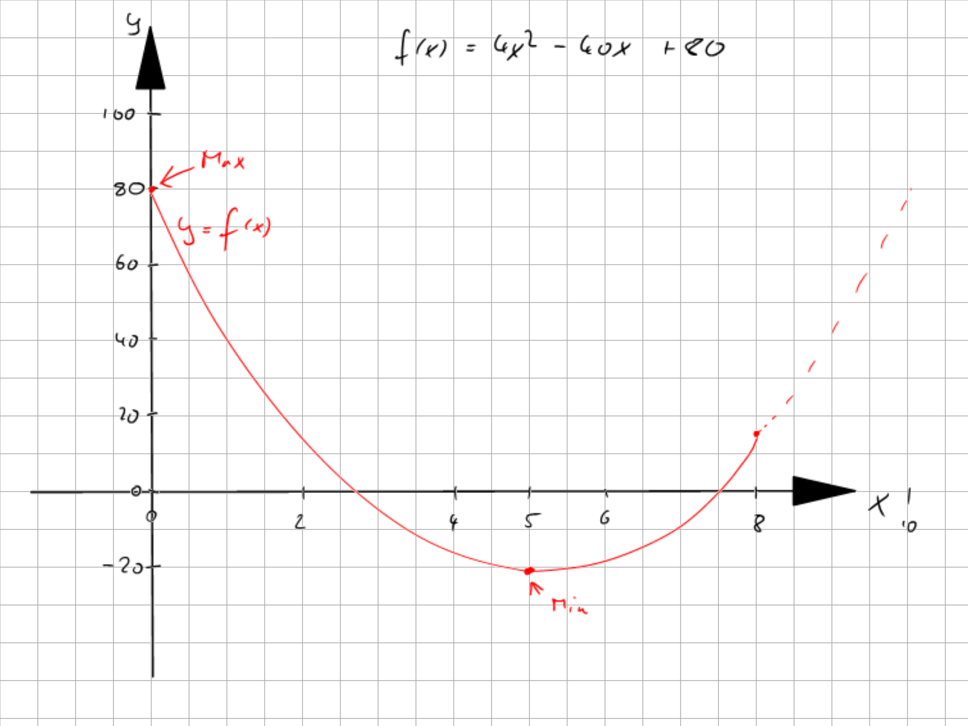
$$= 4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 25 - 5)$$

$$= 4[(x-5)^2 - 5] \Rightarrow f(5) = -20$$

$$f'(x) = 8x - 40 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5 \begin{array}{l} > 0 \\ < 8 \end{array}$$

innere Stelle

$$f''(x) = 8 > 0 \text{ für alle } 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow x = 5 \text{ eindeutige Min-Stelle.}$$



f(x) = 4x^2 - 40x + 80
y
100
80
60
40
20
0
-20
Max
y = f(x)
0
2
4
5
6
8
10
x
Min

Aufgabe 9.6.5 von Seite 420

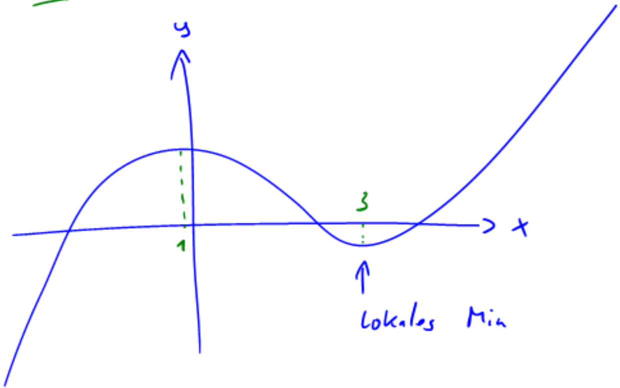
Sei

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Welche Forderungen müssen an die Konstanten a, b und c gestellt werden, damit die Funktion

a) ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$ hat?

b) stationäre Stellen in $x = 1$ und $x = 3$ hat?



a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \boxed{b = 0}$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(0) = 6 \cdot 0 + 2a > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a > 0}$

b) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\rightsquigarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0$ I

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0$

$\Leftrightarrow 27 + 6a + b = 0$ II

$24 + 4a = 0$ II - I

$\Leftrightarrow 4a = -24$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

I $3 + 2(-6) + b = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 12 + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 9}$

Aufgabe 9.7 von Seite 421: (optional)

$>0 \iff x > -1$

Sei $g(x) = x - 2\ln(\overbrace{x+1}^{>0})$:

a) Wo ist g definiert?
b) Bestimme $g'(x)$ und $g''(x)$.
c) Bestimme alle Extremstellen und Wendestellen.
d) Skizziere den Graphen.

$g'' > 0$ für alle x
$\Rightarrow$ es gibt keine Wendestelle.

a) Definitionsbereich: $(-1, \infty)$

b) $g'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x+1} = 1 - 2(x+1)^{-1}$

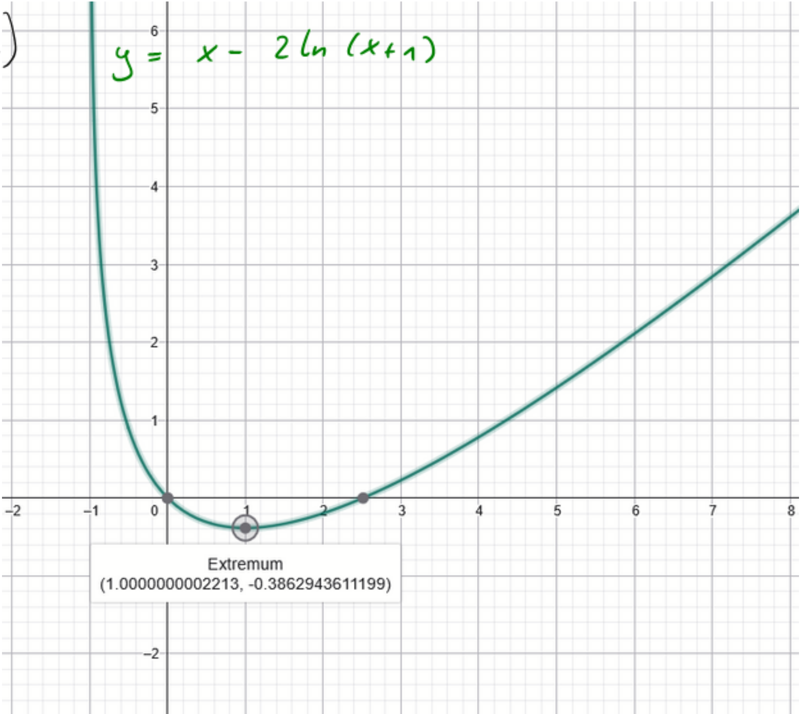
$g''(x) = -2 \cdot (-1)(x+1)^{-2} = 2\frac{1}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} > 0 \Rightarrow g$ streng konvex

c) $g'(x) \overset{!}{=} 0 \iff 1 - \frac{2}{x+1} = 0 \iff 1 = \frac{2}{x+1} \iff x+1 = 2$

$\iff \boxed{x = 1}$ einzige stationäre Stelle.

g str. konvex $\Rightarrow$ $x=1$ eindeutige Min-Stelle.

d)


y = x - 2 ln (x+1)
6
5
4
3
2
1
0
−2
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
Extremum
(1.0000000002213, -0.3862943611199)