Übungen 1 & 2 zu Kapitel 7:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

7.1 Implizites Differenzieren

Aufgabe 7.1.4 von Seite 291

Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

7.4 Lineare Approximation

Aufgabe 7.4.1 von Seite 304

Aufgabe 7.4.5 von Seite 304

Aufgabe 7.4.9 von Seite 305

7.7 Elastizitäten

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317

Aufgabe 7.7.4 von Seite 317

Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

7.8 Stetigkeit

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 325

Aufgabe 7.8.5 auf Seite 325

7.12 Regel von L'Hôpital

Aufgabe 7.12.3 auf Seite 348

Aufgabe 7.1.4 von Seite 291

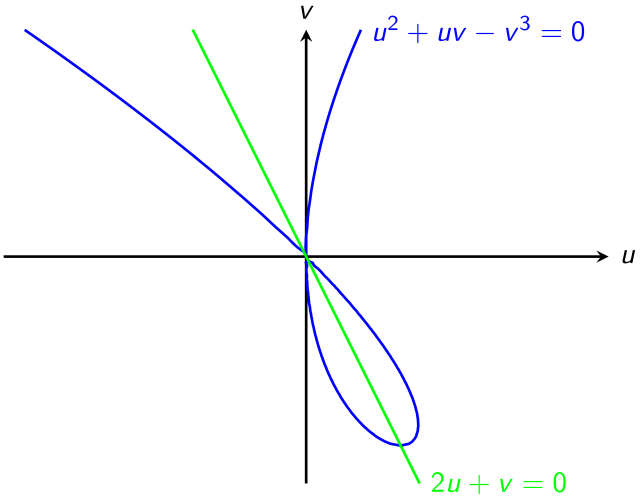
Eine Kurve in der uv-Ebene sei gegeben durch:

$$u^2 + uv - v^3 = 0$$

Berechne dv/du durch implizites Differenzieren.

Bestimme den Punkt (u, v) auf der Kurve, in dem $dv/du = 0$ und $u \neq 0$ ist.

Graph zu Aufgabe 7.1.4



Aufgabe 7.1.10 von Seite 291

Die auf der Abbildung der nächsten Folie gezeigte elegante Kurve ist als *Lemniskate* bekannt (Bernoulli 1667-1748). Dieser Graph wird durch die Gleichung

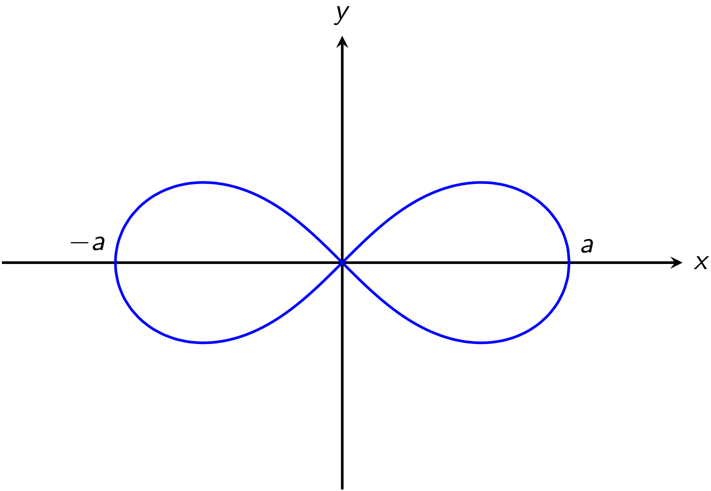
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

bestimmt, wobei a eine positive Konstante ist.

a) Bestimme die Steigung der Tangente an diese Kurve in einem Punkt (x, y), in dem $y \neq 0$ ist.

b) Bestimme diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente parallel zur x-Achse ist.

Eine Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$



Aufgabe 7.4.1 von Seite 304

Zeige, dass $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für x nahe 0 und illustriere diese Approximation.

Aufgabe 7.4.5 von Seite 304

Seien p, q und r Konstanten. Bestimme die folgenden Differentiale:

a) $d(10x^3)$

b) $d(5x^3 - 5x^2 + 5x + 5)$

c) $d(1/x^3)$

d) $d(\ln(x))$

e) $d(x^p + x^q)$

f) $d(x^p x^q)$

g) $d(px + q)^r$

h) $d(e^{px} + e^{qx})$

Aufgabe 7.4.9 von Seite 305

Differential: $dF = F' \cdot dr$

Ein Kreis mit Radius r hat:

die Fläche $F(r) = \pi r^2$

den Umfang $F'(r) = 2\pi r$

a) Erkläre die Approximation $\overbrace{F(r + dr) - F(r)}^{\Delta F} \approx \overbrace{2\pi r dr}^{dF}$ geometrisch.

b) Ist $F(r + dr)$ kleiner oder größer als $F(r) + 2\pi r dr$?

$$F(r+dr) \approx F(r) + 2\pi r\, dr + \underbrace{\pi (dr)^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad F(r+dr) > F(r) + 2\pi r \cdot dr$$

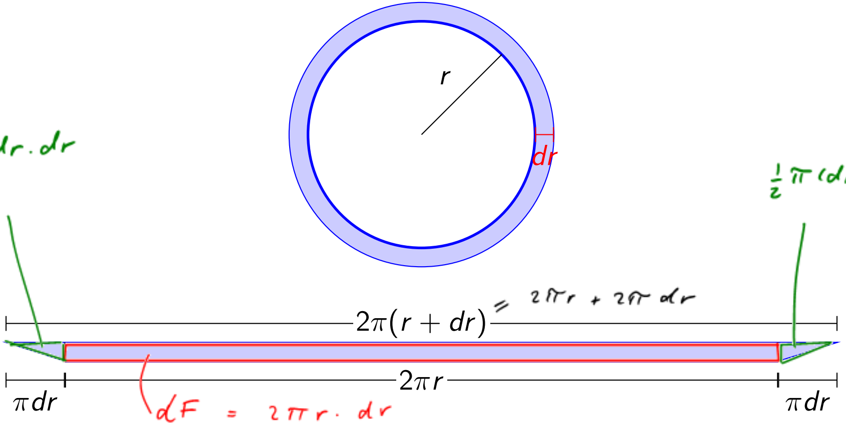
Lineare Approximation

$$F(\underbrace{r+dr}_{x}) \approx F(\underbrace{r}_{x_0}) + F'(\underbrace{r}_{x_0})(\underbrace{r+dr}_{x} - \underbrace{r}_{x_0}) = F(r) + 2\pi r \cdot dr$$

$$\Leftrightarrow \quad F(r+dr) - F(r) \approx 2\pi r \cdot dr$$

$\frac{1}{2}\pi\, dr \cdot dr$

$\frac{1}{2}\pi (dr)^2$



$= 2\pi r + 2\pi\, dr$

$I\, dr$

$dF = 2\pi r \cdot dr$

quadratische Approximation

$$F(r+dr) \approx F(r) + F'(r)(r+dr-r) + \frac{1}{2} F''(r)(r+dr-r)^2$$

quadratische Approximation

$$F(r+dr) \approx F(r) + F'(r)(r+dr-r) + \frac{1}{2}F''(r)(r+dr-r)^2$$

$$F(r+dr) - F(r) \approx 2\pi r \cdot dr + \frac{1}{2} 2\pi (dr)^2$$

$$= 2\pi r \cdot dr + \underline{\underline{\pi (dr)^2}}$$

$$F(r) = \pi r^2$$

$$F'(r) = 2\pi r$$

$$F''(r) = 2\cdot\pi$$

Aufgabe 7.7.1 von Seite 317

Bestimme die Elastizitäten der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen:

a) $3x^{-3}$

b) $-100x^{100}$

c) $\sqrt{x}$ $= x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow El_x \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

d) $A/x\sqrt{x}$

f differenzierbar , $f(x) \neq 0$

Elastizität

$$El_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$\varepsilon(x)$

Interpretation:

$x \nearrow 1\%$

$\Rightarrow f(x) \nearrow \varepsilon(x)\ \%$

a)

$$f(x) = 3x^{-3}$$

$$f'(x) = -9x^{-4}$$

$$f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)} = -9x^{-4}\cdot\frac{x}{3x^{-3}} = \frac{-9x^{-4}\cdot x^{1}}{3x^{-3}}$$

$$= \frac{-9\cdot x^{-3}}{3\cdot x^{-3}} = -\frac{9}{3} = -3$$

b)

$$g(x) = -100x^{100}$$

$$g'(x) = -10.000\,x^{99}$$

$$g'(x)\cdot\frac{x}{g(x)} = -10.000\cdot x^{99}\cdot\frac{x}{-100x^{100}} = \frac{-10.000\,x^{99}\cdot x}{-100\,x^{100}}$$

$$= \frac{-10.000\,x^{100}}{-100\,x^{100}} = \frac{-10.000}{-100} = 100$$

c) $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$h'(x)\,\frac{x}{h(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{2\underbrace{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}_{x}} = \frac{1}{2}$$

d) $h(x) = \frac{A}{x\sqrt{x}} = A \cdot (x\sqrt{x})^{-1} = A(x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}})^{-1}$

$= A \cdot (x^{\frac{3}{2}})^{-1} = A\, x^{-\frac{3}{2}}$

$h'(x) = -\frac{3}{2} \cdot A\, x^{-\frac{5}{2}}$

$h'(x) \cdot \frac{x}{h(x)} = -\frac{3}{2} \cdot A \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{x}{A\, x^{-\frac{3}{2}}}$

$= \frac{-\frac{3}{2} \cdot A \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot x^{1}}{A \cdot x^{-\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{3}{2} \cdot A\, x^{-\frac{3}{2}}}{A \cdot x^{-\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 7.7.4 von Seite 317

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' \cdot \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} + g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)}$$

Verwende die Definition der Elastizität um diese für folgende Funktionen zu bestimmen, wobei a und p Konstanten sind:

a) $f(x) = e^{ax}$

b) $g(x) = \ln(x)$

c) $h(x) = x^p e^{ax}$

d) $k(x) = x^p \ln(x)$

a) $f(x) = e^{ax}$

$f'(x) = a\,e^{ax}$

$f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = a \cdot \cancel{e^{ax}} \cdot \frac{x}{\cancel{e^{ax}}}$

$= \boxed{a \cdot x}$

äußere Funktion $f(y) = e^{y}$

innere Funktion $g(x) = a \cdot x$

Kettenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\left(e^{ax}\right)' = e^{ax} \cdot a$

---

b) $g(x) = \ln(x)$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$

c) $x^p \cdot e^{ax}$

$$(x^p \cdot e^{ax})' \cdot \frac{x}{x^p \cdot e^{ax}} = \underbrace{(x^p)' \cdot \frac{x}{x^p}}_{=p} + \underbrace{(e^{ax})' \cdot \frac{x}{e^{ax}}}_{=ax}$$

$$= p + ax$$

d) $$\left(x^p \cdot \ln(x)\right)' \frac{x}{x^p \cdot \ln(x)} = \underbrace{(x^p)' \cdot \frac{x}{x^p}}_{=p} + \underbrace{(\ln(x))' \cdot \frac{x}{\ln(x)}}_{=\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$= p + \frac{1}{\ln(x)}$$

Aufgabe 7.7.9 von Seite 318

Es seien f und g differenzierbare Funktionen von x mit positiven Funktionswerten.

Zeige, dass:

b) Die Elastizität des Produkts $f \cdot g$ ist die Summe der Elastizitäten von f und g. $\leadsto$ siehe Vorlesung

c) Die Elastizität des Quotienten von $\frac{f}{g}$ ist die Differenz der Elastizitäten von f und g.

f) Die Elastizität der Verkettung $f \circ g$ ist das Produkt der Elastizitäten von f und g.

c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot \frac{x}{\frac{f(x)}{g(x)}}$

Quotienten-
regel

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \cdot \frac{x}{\frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) \cdot x - f(x) \cdot g'(x) \cdot x}{g(x)^{\cancel{2}} \cdot \frac{f(x)}{\cancel{g(x)}}} = \frac{f'(x) \cdot \cancel{g(x)} \cdot x}{\cancel{g(x)} \cdot f(x)} - \frac{\cancel{f(x)} \cdot g'(x) \cdot x}{g(x) \cdot \cancel{f(x)}}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} - g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)}$$

f) $\left(f(g(x))\right)' \cdot \frac{x}{f(g(x))}$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{f(g(x))}$

$= \underbrace{f'(g(x)) \cdot \frac{g(x)}{f(g(x))}} \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)}$

$El_{g(x)} f(g(x)) \cdot El_x g(x)$

$El_y f(y) \cdot El_x g(x)$

$y = g(x)$

Aufgabe 7.8.2 auf Seite 325

Seien f und g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{für } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{für } x \leq 2 \\ -x + 6, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeichne von jeder Funktion den Graphen.

Ist f stetig an der Stelle $x = 0$?

Ist g stetig an der Stelle $x = 2$?

Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, falls

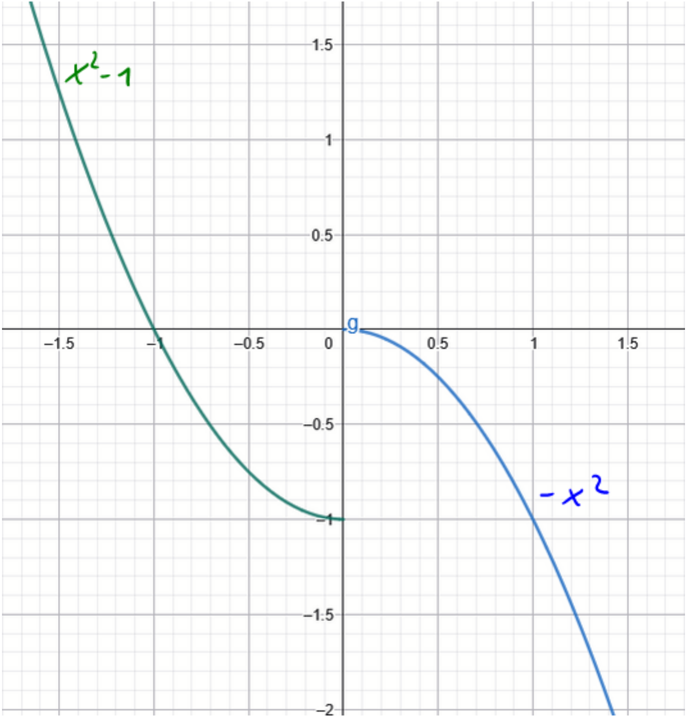
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$$

$\neq$

$$\lim_{x \to 0^+} -x^2 = -0^2 = 0$$

f ist nicht stetig für $x_0 = 0$



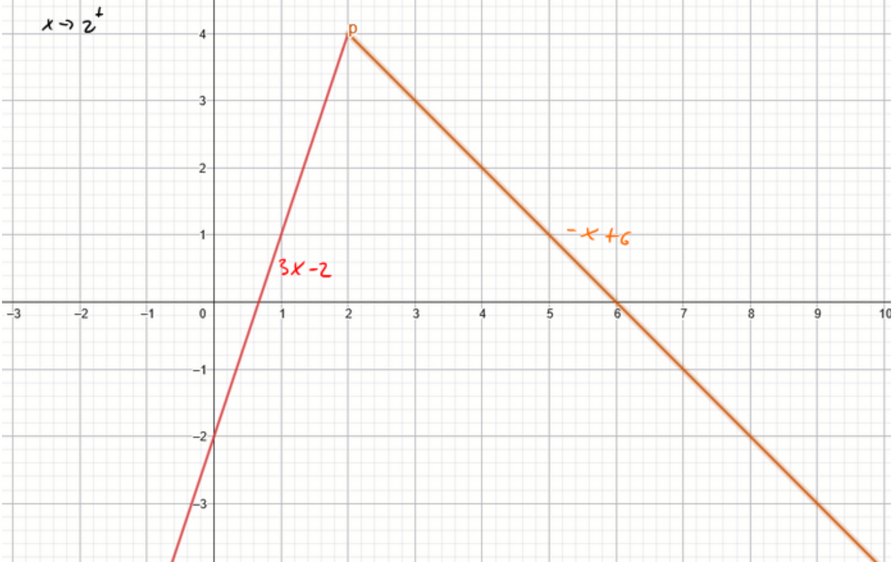
x^2-1
$-x^2$
g
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

$$\lim_{x \to 2^-} 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} -x + 6 = -2 + 6 = 4$$

$=$

g ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$.



Aufgabe 7.8.5 auf Seite 325

Für welche Werte von a ist die folgende Funktion stetig für alle x?

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , \text{für } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & , \text{für } x > 1 \end{cases}$$

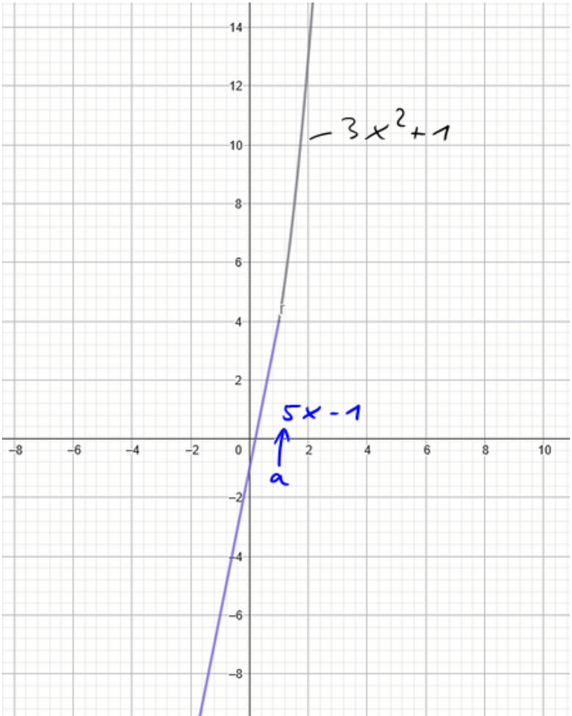
$$\lim_{x \to 1^-} ax - 1 = a \cdot 1 - 1 = a - 1$$

$$\overset{!}{=}$$

$$\lim_{x \to 1^+} 3x^2 + 1 = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$$

f ist stetig für $x_0 = 1$, falls $a - 1 = 4$

$\Leftrightarrow a = 5$


14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
$-3x^2+1$
$5x-1$
a

Aufgabe 7.12.3 auf Seite 348

Verwende die Regel von L'Hôpital, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)$

Falls $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ und f & g diff'bar

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad g'(x_0) \neq 0$$

a) $\left.\dfrac{x-1}{x^2-1}\right|_{x=1} = \left.\dfrac{1}{2x}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$ ✓

$\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \left.\dfrac{1}{x+1}\right|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

d) $$\left.\frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}\right|_{x=1}$$

$$\overbrace{\ln(1)}^{=0} - 1 + 1 = 0 \checkmark$$

$$(1-1)^2 = 0 \checkmark$$

$$= \left.\frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)'}{\left(2(x-1)\right)'}\right|_{x=1} = \left.\frac{\frac{1}{x^2}}{2}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

e) $$\frac{1}{x-1}\ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\frac{3}{8}}{1} = \frac{3}{8}$$

$$= \left.\frac{\ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)}{x-1}\right|_{x=1} = \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{7+1}{4+4}\right)}^{=0\ \checkmark}}{\underbrace{1-1}_{=0}}$$

$$\left(\ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)\right)' = \frac{\cancel{4x+4}}{7x+1}\cdot\frac{7\cdot(4x+4)-(7x+1)\cdot 4}{(4x+4)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\cancel{28x}+28-\cancel{28x}-4}{(7x+1)(4x+4)} = \left.\frac{24}{(7x+1)(4x+4)}\right|_{x=1} = \frac{24}{8\cdot 8}$$

$$= \frac{3}{8}$$