Vorlesung zu Kapitel 08:[1]

Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

8.1 Intuition

8.2 Definitionen

8.3 Allgemeine Eigenschaften

8.4 Tests der ersten Ableitung

8.5 Tests der zweiten Ableitung

8.6 Wendestellen

8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang

8.1 Intuition: Seilbrücke über Bach

8.2 Definition Konvexkombination

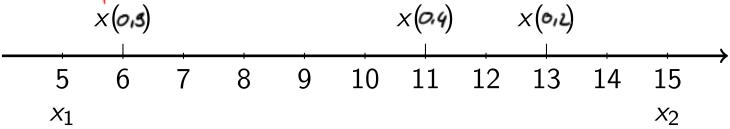
Für zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 ist für λ mit $0 \le \lambda \le 1$

$$\underbrace{x(\lambda)}_{6} = \lambda \cdot \underbrace{x_1}_{5} + (1 - \lambda) \cdot \underbrace{x_2}_{15}$$

eine **Konvexkombination** von x_1 und x_2.

Beispiel:

$$x(\lambda) = \lambda \cdot 5 + (1 - \lambda) \cdot 15$$



$$11 = 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot 15 = 2 + 9$$

$$6 = \lambda \cdot 5 + (1-\lambda) 15 = \lambda 5 + 15 - \lambda 15$$

$$= -\lambda \cdot 10 + 15$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot 10 = 15 - 6 = 9$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

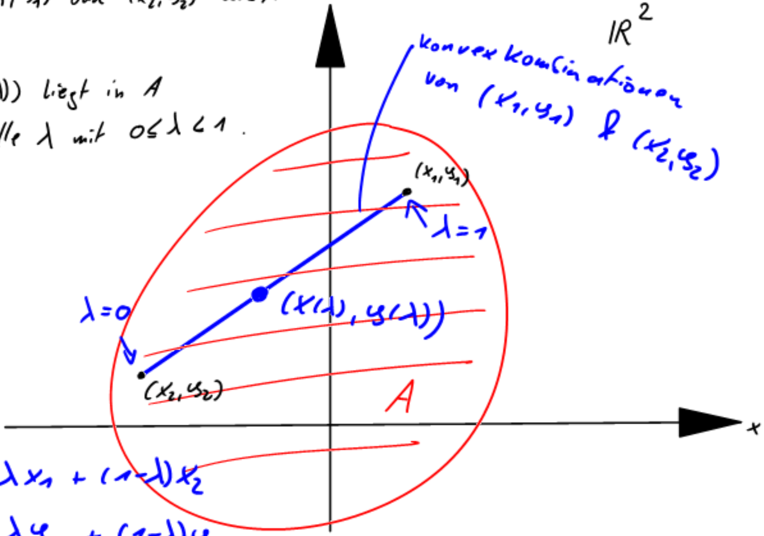
Definition Konvexe Menge

für alle (x_1,y_1) und (x_2,y_2) aus A

gilt:

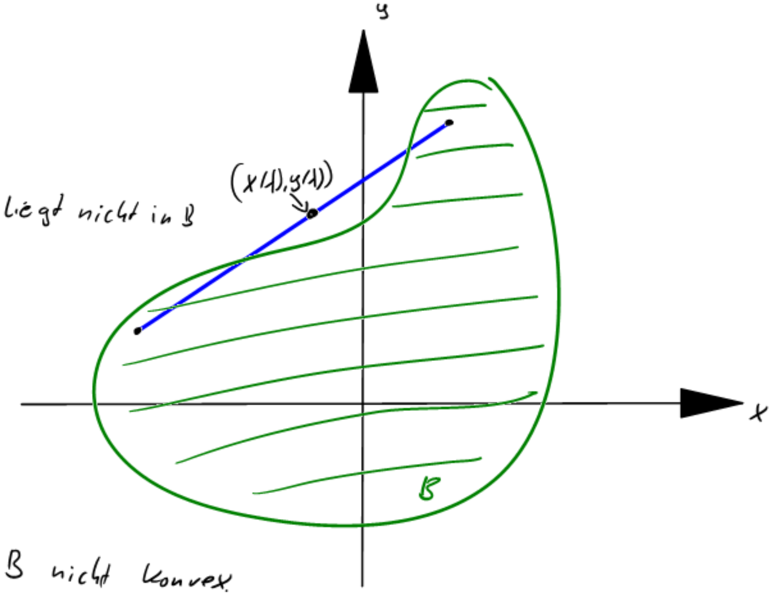
$(x(\lambda),y(\lambda))$ liegt in A

für alle λ mit $0 \le \lambda \le 1$.



$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

$$y(\lambda) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$



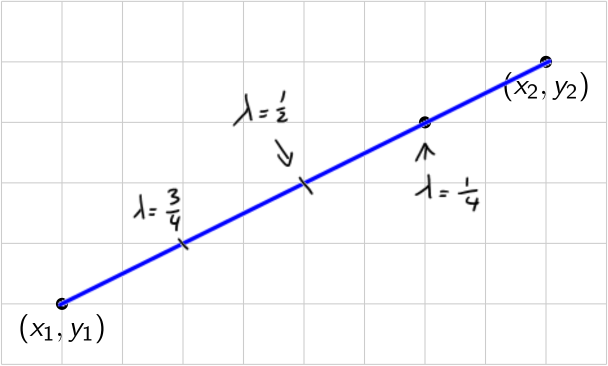
$\Rightarrow$ B nicht konvex.

Konvexkombinationen von Punkten

Für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

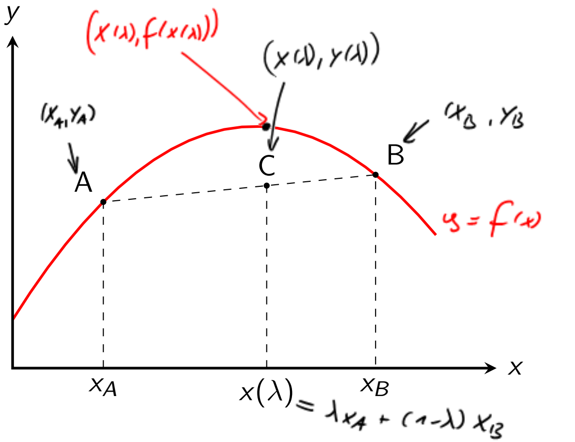
$$(x(\lambda), y(\lambda)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2)$$

eine Konvexkombinationen dieser beiden Punkte.



Mit der Konvexkombination von Punkten können wir nun die „Wäscheleine“ als Formel darstellen:

$y(\lambda) = \lambda y_A + (1-\lambda) y_B$



$$C = \lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$$

8.2 Definition konkave Funktion

Eine Funktion f heißt **konkav** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

$$\overbrace{f(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b)}^{\text{y Koordinate auf dem Graphen}} \geq \underbrace{\lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(b)}_{\text{y-Koordinate auf der Wäscheleine}}$$

für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist f **strikt konkav**.

8.2 Definition konvexe Funktion

Eine Funktion f heißt **konvex** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

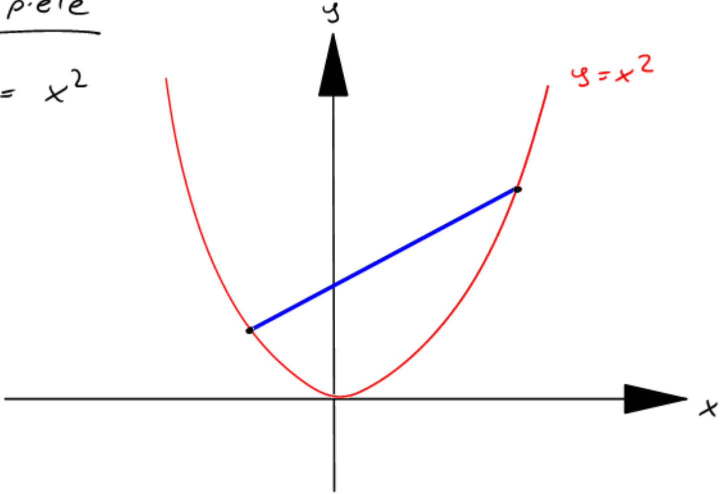
für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist f **strikt konvex**.

Anmerkung: Falls f konvex ist, so ist $-f$ konkav.

Beispiele

$f(x) = x^2$



Eine Fkt ist konvex, falls

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$f(x) = x^2$ zu zeigen:

$$\Big(\underbrace{\lambda x_1}_{a} + \underbrace{(1-\lambda)x_2}_{b}\Big)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda x_1)^2 + 2\lambda x_1 (1-\lambda)x_2 + ((1-\lambda)x_2)^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$$

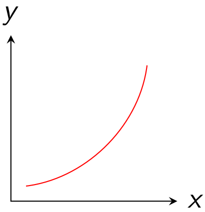
$$\Leftrightarrow \lambda^2 x_1^2 - \lambda x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2x_2^2 - (1-\lambda)x_2^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)(\cancel{1}-\lambda-\cancel{1})x_2^2 \leq 0 \quad \Big| : (1-\lambda)$$

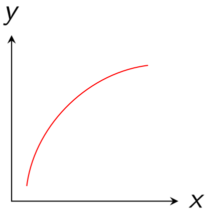
$$\Leftrightarrow -\lambda x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 - \lambda x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 \leq 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \geq 0$$ ✓ für alle x_1, x_2

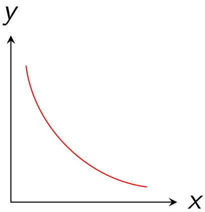
Monotonie und Krümmung



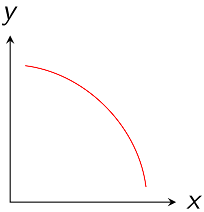
wachsend, konvex



wachsend, konkav



fallend, konvex



fallend, konkav

8.3 Allgemeine Eigenschaften

Wir präsentieren in diesem Abschnitt allgemeine Eigenschaften konkaver Funktionen.

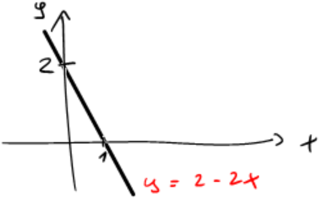
Mit der Regel

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow -f \text{ konvex}$$

Lassen sich diese Eigenschaften leicht für konvexe Funktionen anwenden.

Summen

eine Funktion $g(x) = mx + b$
ist konkav und konvex



Sind die Funktionen f und g konkav, so ist $f + g$ ebenfalls konkav.

Ist hierbei f oder g strikt konkav, so ist $f + g$ strikt konkav.

Beispiel:

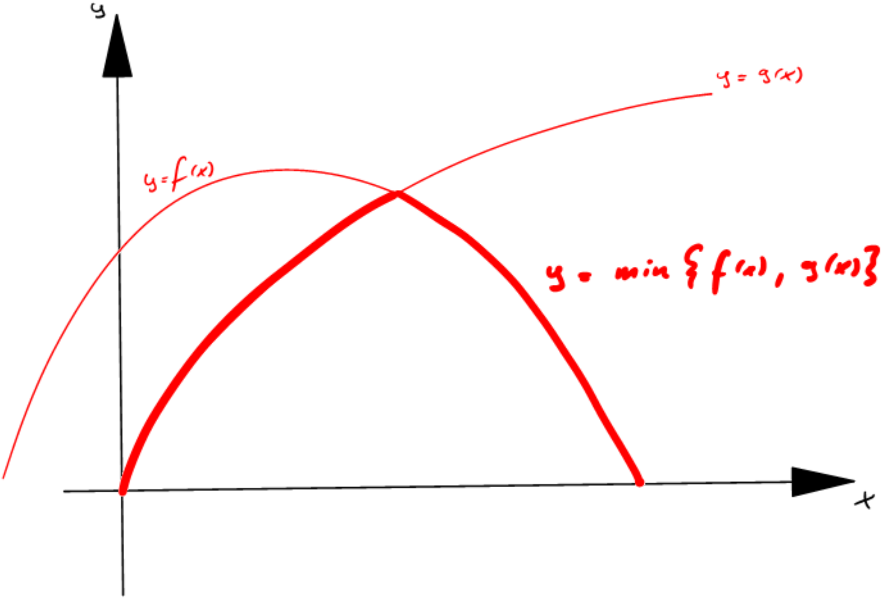
Ist $f(x) = \underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{strikt konvex}} \underbrace{- 2x + 2}_{\text{(auch) konvex}}}_{\text{strikt konvex}}$ konkav, konvex, oder weder noch?

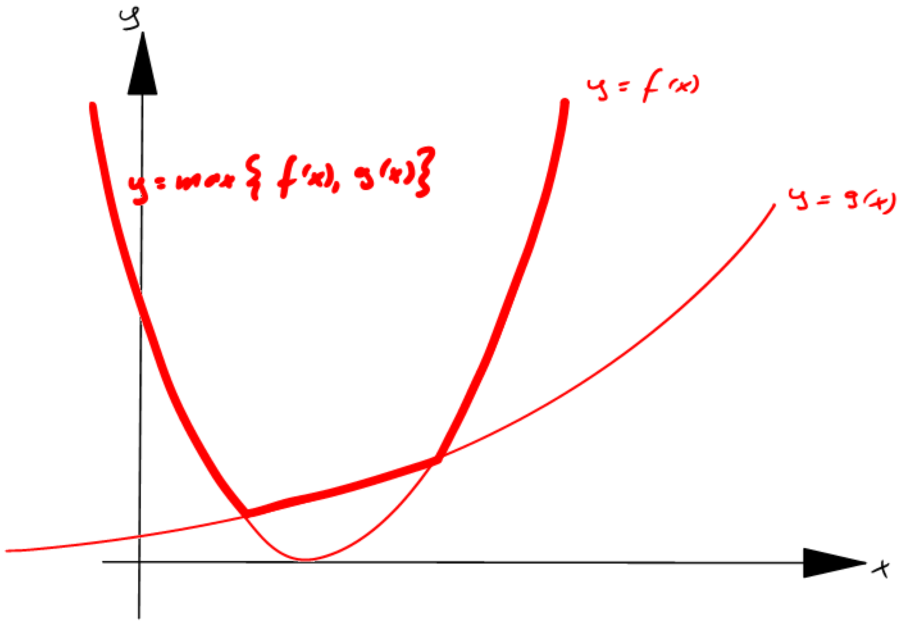
Minima und Maxima

Sind die Funktionen f und g konkav, so ist $\min\{f, g\}$ ebenfalls konkav.

Dies ist äquivalent zu:

Sind die Funktionen f und g konvex, so ist $\max\{f, g\}$ ebenfalls konvex.


y
y = g(x)
y = f(x)
y = min{f(x), g(x)}
x


y
y = f(x)
y = max{f(x), g(x)}
y = g(x)
x

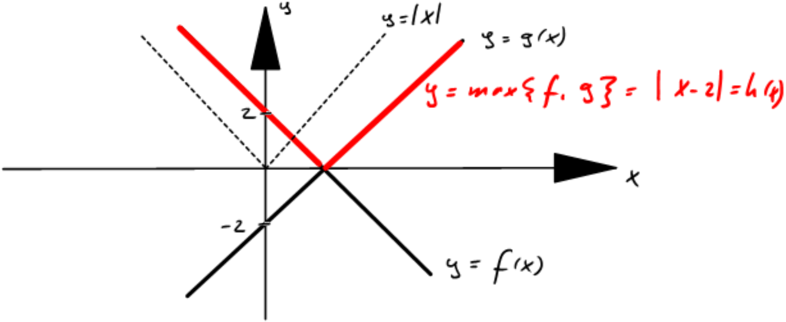
Übung:

$f(x) = \overbrace{2 - x}^{\text{konkav \& konvex}}$ und sei $g(x) = \overbrace{-2 + x}^{\text{konkav \& konvex}}. = -(2 - x) = -f(x)$

Ist $\max\{f, g\}$ konkav, konvex oder weder noch?

Ist $h(x) = \underbrace{|x - 2|}_{= \max\{x-2,\, -x+2\}}$ konkav, konvex, oder weder noch? $\longrightarrow \begin{cases} x - 2, & \text{falls } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{falls } x < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f konvex, g konvex $\Rightarrow$ $\max\{f, g\}$ konvex



Verkettung von Funktionen

innere Fkt. äußere Fkt

Sei f konkav und sei g monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g \circ f$ ebenfalls konkav.

f konkav: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

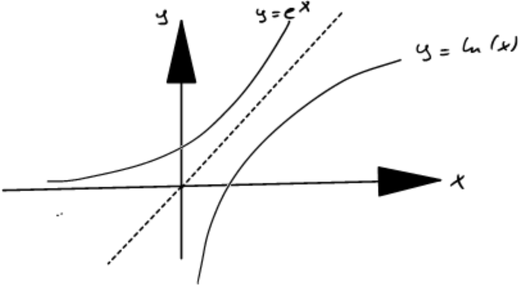
g monoton wachsend:

$$\underline{g(f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2))} \geq g(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$$

g konkav

$$g(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \geq \underline{\lambda \cdot g(f(x_1)) + (1-\lambda) g(f(x_2))}$$

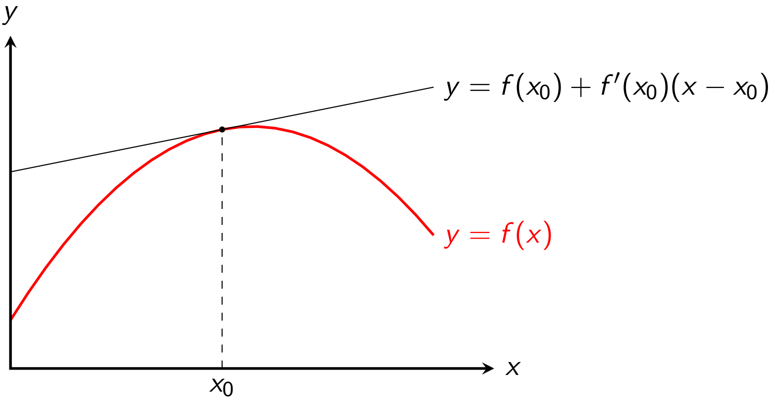
Inverse von Funktionen



Sei f streng monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g = f^{-1}$ streng monoton wachsend und konvex.

8.4 Tests der ersten Ableitung



Charakterisierung von konkaven und konvexen Funktionen

Die Funktion f sei differenzierbar.

- f ist konkav genau dann, wenn für alle x_0 und x gilt:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Graph}} \leq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Tangente}}$$

f ist konvex genau dann, wenn für alle x_0 und x gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

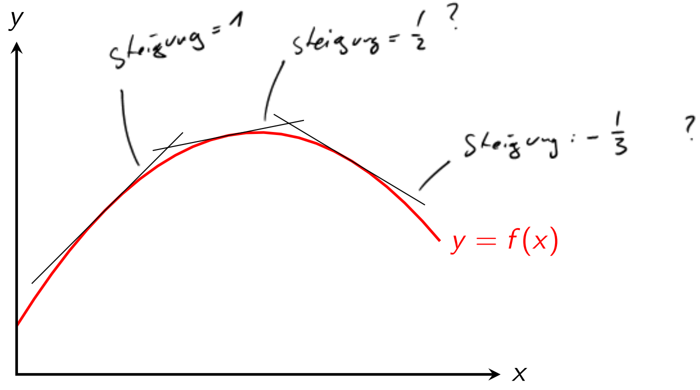
$$
\begin{aligned}
x^2 &\geq x_0^2 + 2 \cdot x_0 (x - x_0) \\
&= x_0^2 + 2x_0 x - 2x_0^2 \\
&= -x_0^2 + 2x_0 x
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x_0^2 - 2x_0 x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x_0 x + x_0^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

f konkav: Die Steigung der Tangente fällt in x



$f'(x)$ fällt in x

f konvex: Die Steigung der Tangente wächst in x

$f'(x)$ steigt in x

8.5 Tests der zweiten Ableitung

Sei f zweimal differenzierbar.

$$\overbrace{f''(x) \leq 0}^{f'(x) \text{ monoton fallend}} \text{ für alle } x \Leftrightarrow f \text{ ist } \textbf{konkav}$$

$$f''(x) < 0 \text{ für alle } x \Rightarrow f \text{ ist } \textbf{streng konkav}$$

$$\underbrace{f''(x) \geq 0}_{f'(x) \text{ monoton wachsend}} \text{ für alle } x \Leftrightarrow f \text{ ist } \textbf{konvex}$$

$$f''(x) > 0 \text{ für alle } x \Rightarrow f \text{ ist } \textbf{streng konvex}$$

$f(x) = x^4 = (x^2)^2$ streng konvex

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 = 12x^2 \geq 0$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 > 0$

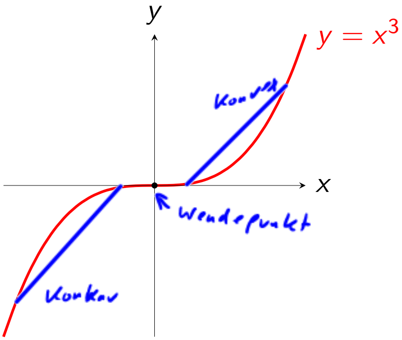
$\Rightarrow f$ str. konvex.

8.6 Wendestellen

Sei f zweifach differenzierbar.

Die Stelle x_0 heißt **Wendestelle** für f, falls f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Der Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** des Graphen von f.



$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$6x < 0$ für $x < 0$

$6x > 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ $6x = 0$ für $x = 0$

Zusammenfassung

- Konkavität / Konvexität
- Summen und Minima / Maxima
- Verkettung und Inverse
- Tests der ersten Ableitung
- Tests der zweiten Ableitung
- Wendestellen und Wendepunkte