Vorlesung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

9.1 Extremstellen

Sei f eine Funktion. Dann ist

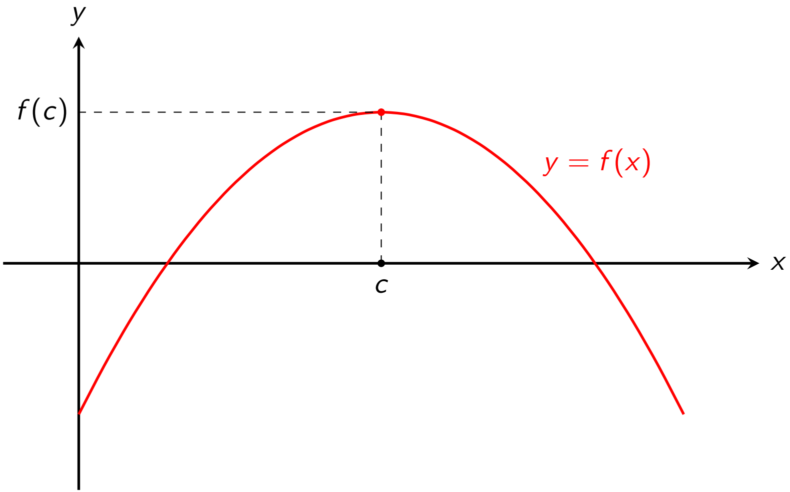
- c eine **Maximalstelle** für f und $f(c)$ ist der **Maximumwert**, wenn
$$f(x) \leq f(c) \text{ für alle } x$$

- d eine **Minimalstelle** für f und $f(d)$ ist der **Minimumwert**, wenn
$$f(x) \geq f(d) \text{ für alle } x$$

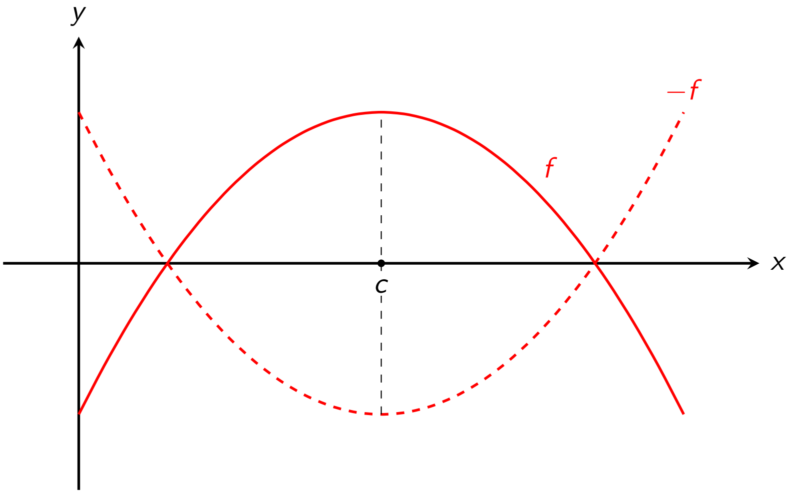
Sind die Ungleichungen strikt für alle $x \neq c$ bzw. $x \neq d$, so heißen c und d strikte Maximal- und Minimalstelle.

Die kollektive Bezeichnung lautet **Extremstelle**.

Maximalstelle c, Maximalwert $f(c)$



Maximum von f = Minimum von $-f$



Bedingungen für innere Extrempunkte

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$.

Behauptung: x_0 kann **keine** Maximumstelle von f sein!

Notwendige Bedingung erster Ordnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Falls $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$:

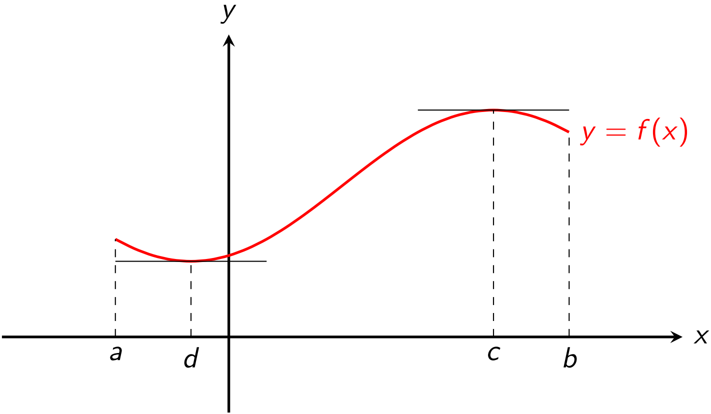
- x_0 kann keine Maximumstelle von f sein.
- x_0 kann keine Minimumstelle von f sein. (Begründung analog)

Damit $x_0 \in (a, b)$ eine Extremstelle für f in (a, b) ist, ist es eine **notwendige Bedingung**, dass die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich null ist:

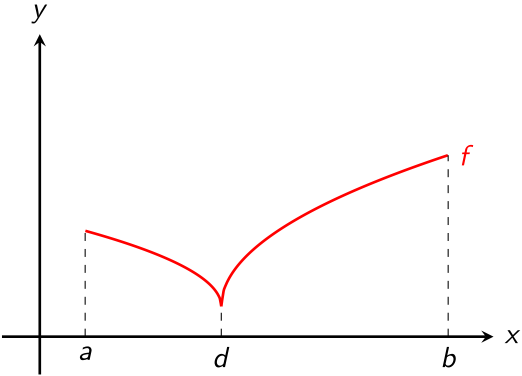
$$f'(x_0) = 0 \ .$$

Wir nennen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch **stationäre** oder **kritische** Stellen.

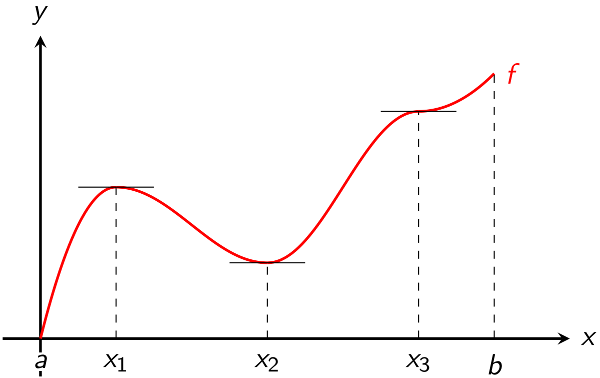
Zwei stationäre Stellen



Keine stationäre Stelle



Keine inneren Extrema



Wenn x stationär ist, können wir nicht schlussfolgern, dass x eine Extremstelle von f ist!

9.2 Einfache Tests auf eine Maximum-/Minimumstelle

Sei x_0 eine stationäre Stelle für f.

(i) Wenn f konkav ist, dann ist x_0 eine Maximumstelle für f.

(ii) Wenn f strikt konkav ist, dann ist eine Maximumstelle für f eindeutig.

(iii) Wenn f konvex ist, dann ist x_0 eine Minimumstelle für f.

(iv) Wenn f strikt konvex ist, dann ist eine Minimumstelle für f eindeutig.

Bedingung 2. Ordnung

Sei f differenzierbar und sei x_0 eine stationäre Stelle.

- Falls $f''(x) \leq 0$ für alle x, dann ist x_0 eine Maximumstelle.
- Falls $f''(x) < 0$ für alle x,
  dann ist x_0 die einzige Maximumstelle.
- Falls $f''(x) \geq 0$ für alle x, dann ist x_0 eine Minimumstelle.
- Falls $f''(x) > 0$ für alle x,
  dann ist x_0 die einzige Minimumstelle.

9.4 Der Extremwertsatz

Es sei angenommen, dass f eine **stetige** Funktion auf einem **abgeschlossenen** und **beschränkten** Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist.

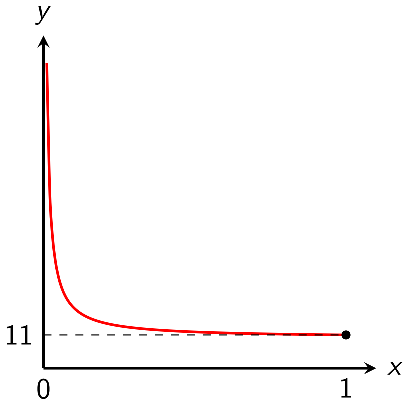
Dann existiert eine Stelle $d \in [a, b]$, an der f ein Minimum hat und eine Stelle $c \in [a, b]$, an der f ein Maximum hat, d.h. es gilt:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \; \forall \; x \in [a, b]$$

Sind stetig, abgeschlossen oder beschränkt nicht erfüllt, können Extremstellen existieren, müssen es aber nicht.

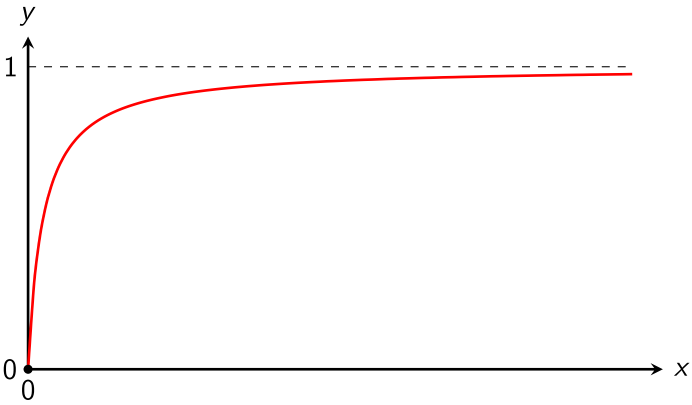
Warum gibt es hier kein Maximum?

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x} + 10$$

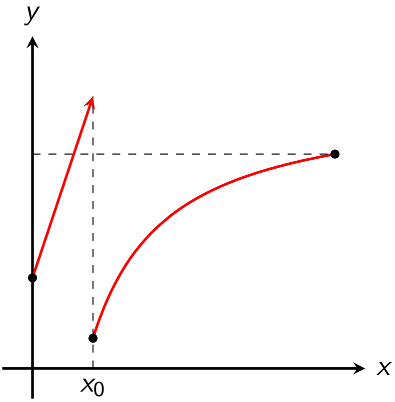


Warum gibt es hier kein Maximum?

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{x+1}$$

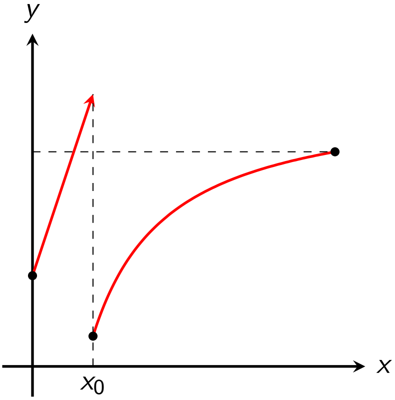


Warum gibt es hier kein Maximum?



Warum gibt es hier kein Maximum?

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



Wie nach Extremstellen gesucht wird

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, wobei der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Jede Extremstelle des Intervalls D gehört zu einer der drei verschiedenen Mengen:

(a) Innere Punkte von D, in denen $f'(x) = 0$ ist;

(b) Endpunkte von D, falls sie zu D gehören; und

(c) Innere Punkte von D, in denen f' nicht existiert.

Punkte, die zu (a), (b) oder (c) gehören, heißen **Kandidaten für Extremstellen**.

Auffinden der Extrema von differenzierbaren Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Um die Extremwerte von f zu finden, gehe wie folgt vor:

1. Bestimme alle stationären Stellen von f in (a, b), d.h. bestimme alle $x \in (a, b)$, die die Gleichung $f'(x) = 0$ erfüllen.

2. Berechne den Funktionswert von f in den Endpunkten a und b des Intervalls und auch an allen stationären Stellen.

3. Der größte der in 1. und 2. gefundenen Funktionswerte ist der Maximalwert und der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in $[a, b]$.

$f : [0,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Zusammenfassung

- Extremstellen: Maximal- & Minimalstellen
- Notwendige Bedingung erster Ordnung für innere Extremstellen
- Bedingung zweiter Ordnung für Extremstellen
- Extremwertsatz