Ökonometrie

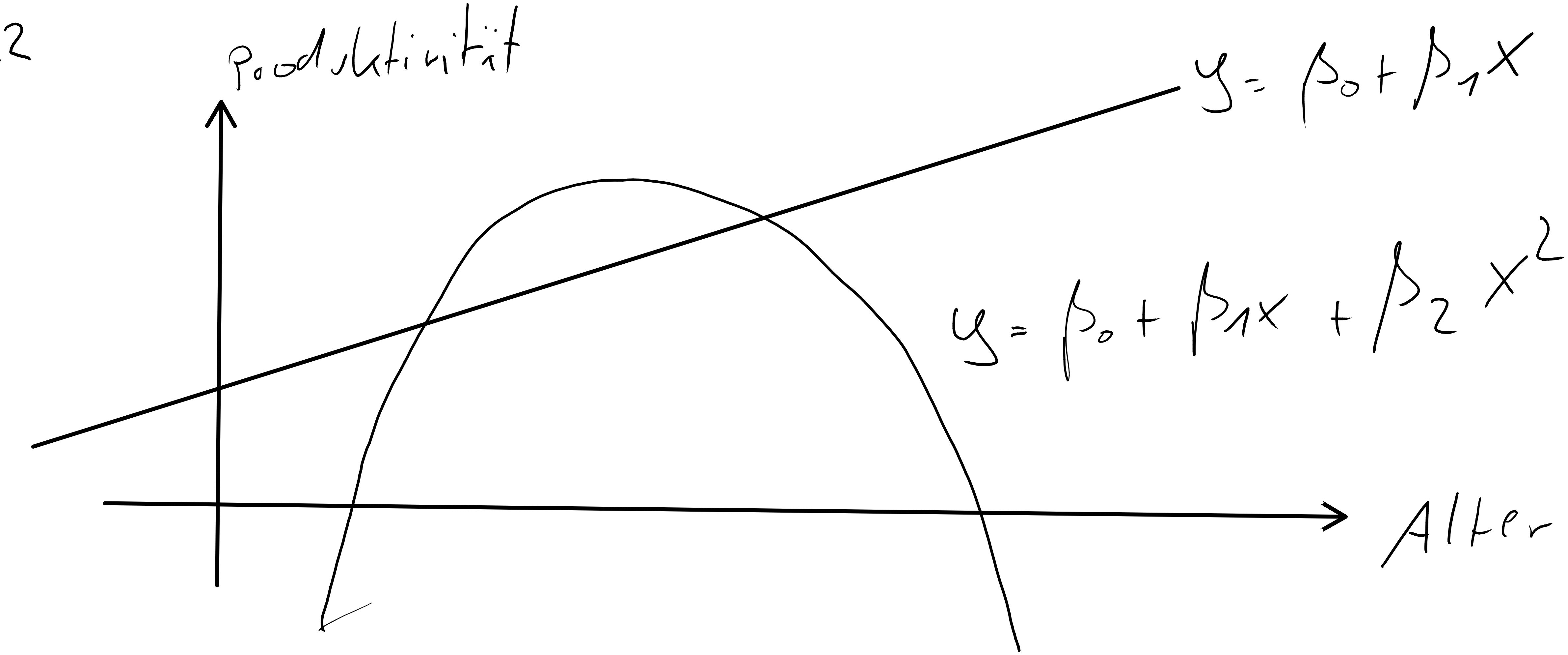
21.4.26

Kapitel 3 Multiple Regression

Vorteile: 1. allgemeinere funktionale Formen

Bsp: X: Alter

$Z = X^2$



2. Zusätzlicher Erklärungsgehalt

Bsp $Lohn = \beta_0 + \beta_1 Bildung + \beta_2 Talent$

3. Strikte Exogenität ist plausibler

Nachteil Matrix Notation!

Kleinste Quadrate (KQ) mit zwei Regressoren

X: 1. Regressor $\qquad$ Z: 2. Regressor

Annahme: X, Z streuen, $S_{XX} > 0$ $\quad S_{ZZ} > 0$

Z ist keine lineare Funktion von X

$$\rho_{XZ} = \frac{\operatorname{cor}(X,Z)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}(Z)}} \quad , \quad |\rho_{XZ}| \neq 1$$

Regressionsmodell

Regressoren $\qquad$ Störterm

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + u_i$$

Regressand $\qquad$ Parameter

Prognose $\hat{y}$

b_0, b_1, b_2: Vermutungen für $\beta_0, \beta_1, \beta_2$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 z_i$$

Prognosefehler Residuum $\hat{u}$

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i$$

Summe der quadrierten Residuen SSR

$$SSR(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i)^2$$

$$\min_{b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i)^2$$

notw. Bed. 1. Ordnung

$$\frac{\partial SSR(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i)(-1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial SSR(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} 2 (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i)(-x_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial SSR(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_2} = \sum_{i=1}^{n} 2 (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 z_i)(-z_i) \stackrel{!}{=} 0$$

Es gibt hier eine eindeutige Lösung $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$

„kleinste Quadrate Schätzer"

Hessematrix

$$H_{SSR} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 SSR}{(\partial b_0)^2} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_0 \, \partial b_1} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_0 \, \partial b_2} \\ \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_1 \partial b_0} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_1 \, \partial b_1} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_1 \, \partial b_2} \\ \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_2 \, \partial b_0} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_2 \, \partial b_1} & \frac{\partial^2 SSR}{\partial b_2 \, \partial b_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2 & \sum_{i=1}^{n} 2x_i & \sum_{i=1}^{n} 2z_i \\ \sum_{i=1}^{n} 2x_i & \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} 2x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n} 2z_i & \sum_{i=1}^{n} 2x_i z_i & \sum_{i=1}^{n} 2z_i^2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{n} z_i & \sum_{i=1}^{n} x_i z_i & \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}^{=n} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i z_i & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \end{pmatrix}$$

1. empirische Momente

$$= 2n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{x} & \overline{xx} & \overline{xz} \\ \bar{z} & \overline{xz} & \overline{zz} \end{pmatrix}$$

2. empirischen Momente

Momente Matrix

$$S_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \overline{xx} - \bar{x} \cdot \bar{x}$$

$$S_{zz} = \qquad = \overline{zz} - \bar{z} \cdot \bar{z}$$

$$S_{xz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = \overline{xz} - \bar{x} \cdot \bar{z}$$

Matrizen & Vektoren

A mit Ordnung $m \times n$ 　　 m: # Zeilen
　　　　　　　　　　　　　　 n: # Spalten

kurz: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Zeile} & \text{Spalte} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Spaltenvektor $\underset{m\times 1}{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^m$

Zeilenvektor $\underset{1\times n}{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$

Stichprobengröße n

Regressionsmodell

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad x_{\cdot j} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad j = 1, \ldots, K \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Anzahl der Regressoren

Regressormatrix

"iota"

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1K} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nK} \end{pmatrix} \qquad \iota = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underset{m\times n}{A}$ ist quadratisch, falls $m=n$

Transponierte Matrix A' (A^T)

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A ist symmetrisch, falls $A = A'$

Besondere Matrizen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix (Identität)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

i-te Zeile

Addition von Matrizen

$\underset{m \times n}{A}, \underset{m \times n}{B}$ $\qquad A + B = B + A = C$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Multipliktation mit Skalar

$\underset{m \times n}{A}, \quad b \in \mathbb{R}$

$$A \cdot b = b \cdot A = C$$

$$c_{ij} = b \cdot a_{ij}$$

Linearkombination von Vektoren

$\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$$b_1 \cdot \mathbf{x} + b_2 \mathbf{z} = b_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_1 x_2 \\ \vdots \\ b_1 x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 z_1 \\ b_2 z_2 \\ \\ b_2 z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 x_1 + b_2 z_1 \\ b_1 x_2 + b_2 z_2 \\ \vdots \\ b_1 x_n + b_2 z_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$v \cdot w$
$$= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

Für $v = w$:

$$v \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{v_i^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Norm (Länge eines Vektors)

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

28.4.26

$$y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i}_{} + u_i$$

$$(1, x_i, z_i) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \beta_0 + x_i \cdot \beta_1 + z_i \cdot \beta_2$$

i.te Zeile von $\mathbb{X}$

Matrix multiplikation

Zeilen $\rightarrow m$, Spalten $\rightarrow n$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times \underline{n}} \quad , \quad B \in \mathbb{R}^{\underline{n} \times o}$$

$$\underset{m \times \underline{n}}{A} \cdot \underset{\underline{n} \times o}{B} = \underset{m \times o}{C}$$

jte Spalte von B

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

iter Zeilenvektor von A

Spezialfall: $\underset{n\times o}{B}$ ist ein Spaltenvektor: $o=1$

$$\underset{m\times \underline{n}}{A}\cdot\underset{\underline{n}\times 1}{B}=\underset{m\times 1}{C}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}\cdot b_n \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n \\ \\ a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\cdots a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{12}b_2 \\ a_{22}b_2 \\ \\ a_{m2}b_2 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n}b_n \\ a_{2n}b_n \\ \\ a_{mn}b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix}b_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{pmatrix}b_2+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{pmatrix}b_n$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \beta_0 + \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \\ x_{n1} \end{pmatrix} \beta_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \\ x_{nk} \end{pmatrix} \beta_k + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & & x_{2k} \\ & & & \\ 1 & x_{n1} & & x_{nk} \end{pmatrix}}^{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{n \times 1}{y} = \underset{n \times \underline{k+1}}{X} \; \underset{\underline{k+1} \times 1}{\beta} + \underset{n \times 1}{u}$$

Die Transponierte eines Matrixproduktes

$$\underset{m \times n}{(A} \cdot \underset{n \times o}{B)}' = \underset{o \times \underline{n}}{B'} \cdot \underset{\underline{n} \times m}{A'}$$

1.4. Stochastische Matrizen & Vektoren

$\underset{m \times n}{A}$ zufällige Matrix

Erwartungswert

$$E[A] = \begin{pmatrix} E[a_{11}] & E[a_{12}] & \cdots & E[a_{1n}] \\ \\ \\ E[a_{m1}] & E[a_{m2}] & \cdots & E[a_{mn}] \end{pmatrix}$$

$\underset{n \times o}{B}$, $\underset{m \times o}{C}$ fest, nicht zufällig

$$E[A \cdot B + C] = E[A] \cdot B + C$$

$\underset{n\times 1}{V}, \underset{n\times 1}{W}$ zufällige Vektoren

Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\Sigma(V,W) = E\Big[\underbrace{\underbrace{(V-E[V])}_{n\times 1}\underbrace{(W-E[W])'}_{1\times n}}_{n\times n}\Big]$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{E[(V_1-E[V_1])(W_1-E[W_1])]}_{Cov(V_1,W_1)} & \dots & \underbrace{E[(V_1-E[V_1])(W_n-E[W_n])]}_{Cov(V_1,W_n)} \\ & & \\ \underbrace{E[(V_n-E[V_n])(W_1-E[W_1])]}_{Cov(V_n,W_1)} & \dots & \underbrace{E[(V_n-E[V_n])(W_n-E[W_n])]}_{Cov(V_n,W_n)} \end{pmatrix}$$

$$\underset{n \times n}{\Sigma}(v, v) = \begin{pmatrix} \underbrace{Cor(v_1, v_1)}_{Var(v_1)} & \cdots & Cor(v_1, v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cor(v_n, v_1) & \cdots & \underbrace{Cor(v_n, v_n)}_{Var(v_n)} \end{pmatrix}$$

$$= \Sigma(v)$$

$$(\Sigma(v))' = \left(E[(v - E[v])(v - E[v])']\right)'$$

$$= E\left[\left((v - E[v])(v - E[v])'\right)'\right]$$

$$= E\left[\left((v - E[v])'\right)'\left((v - E[v])\right)'\right] = E\left[(v - E[v])(v - E[v])'\right]$$

$$= \Sigma(v)$$

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$ Zufallsvektor

Annahmen

$$E[\mathbf{U}] = \begin{pmatrix} E[U_1] \\ E[U_2] \\ \\ E[U_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_n$$

$Var(U_i) = \sigma^2 \quad i = 1, \dots, n$
homoskedastisch

$Cor(U_i, U_j) = 0 \quad i \neq j$
seriell unkorelliert

Rechenregeln für Varianz-Kovarianz-Matrizen

$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{v}}_{m\times 1} + \underset{m\times 1}{b}$ $\qquad A, b$ fest, v zufällig

$$\Sigma(Av+\cancel{b}) = A\,\Sigma(v)\cdot A'$$

$$= E\left[\left(Av+\cancel{b}-E[Av+\cancel{b}]\right)\left(Av+\cancel{b}-E[Av+\cancel{b}]\right)'\right]$$

$$= E\left[\left(Av-E[Av]\right)\left(Av-E[Av]\right)'\right]$$

$$= E\left[A\left(v-E[v]\right)\left(v-E[v]\right)'A'\right]$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

zwei Vektoren v, w, x sind linear abhängig, falls

$$\underset{\text{Vektor}}{v} = \underset{\text{Zahl}}{a} \cdot \underset{\text{Vektor}}{w} + \underset{\text{Zahl}}{b} \cdot \underset{\text{Vektor}}{x}$$

k Vektoren sind linear unabhängig, falls keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

$x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ lin. unabh. falls

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \lambda_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

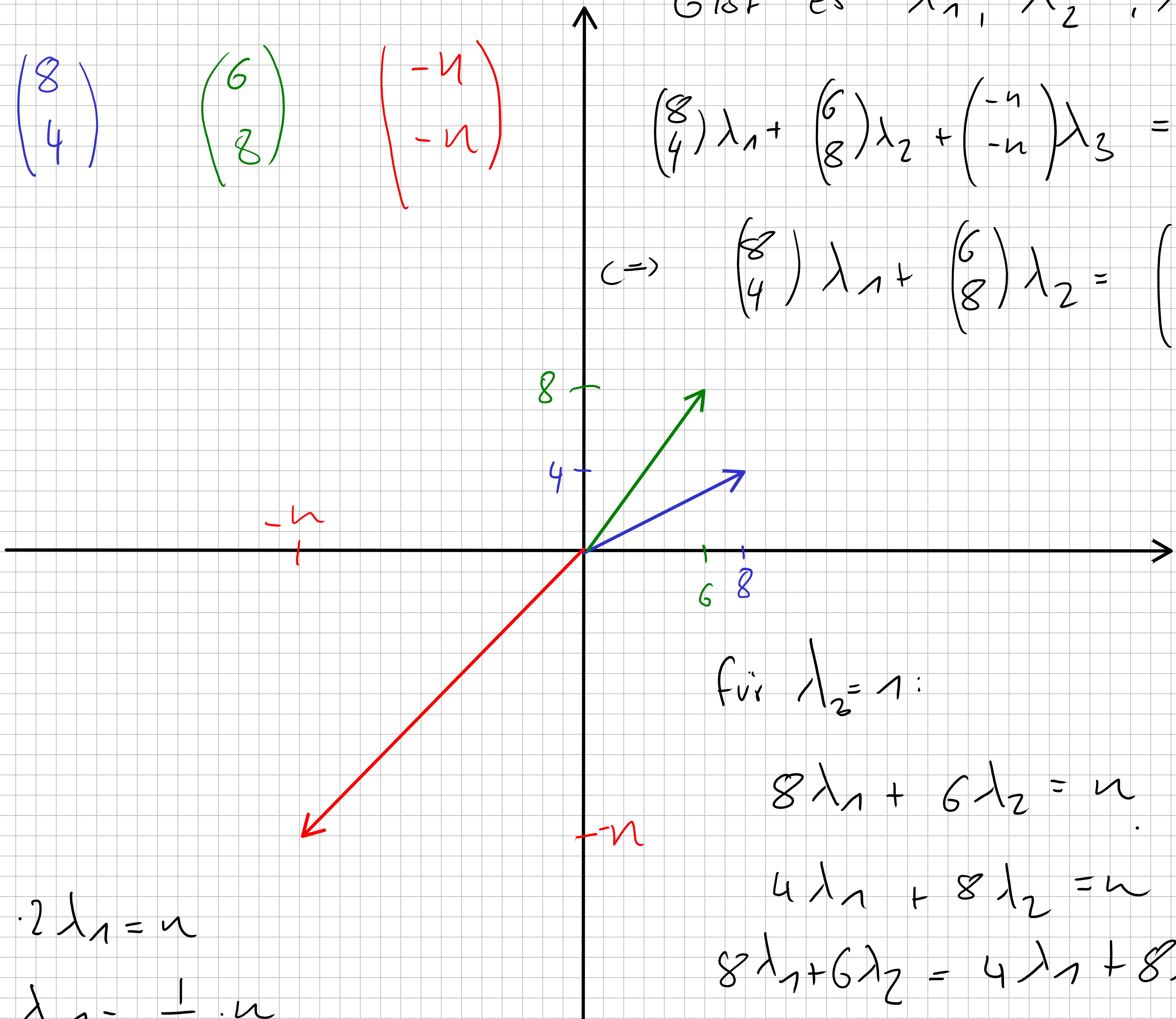
$\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -n \\ -n \end{pmatrix}$

Gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix} -n \\ -n \end{pmatrix}\lambda_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\lambda_2 = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}\lambda_3$$



für $\lambda_2 = 1$:

$$8\lambda_1 + 6\lambda_2 = n$$

$$4\lambda_1 + 8\lambda_2 = n$$

$$8\lambda_1 + 6\lambda_2 = 4\lambda_1 + 8\lambda_2$$

$$4\lambda_1 = 2\lambda_2$$

$$2\lambda_1 = \lambda_2$$

$$8\lambda_1 + 6\cdot 2\lambda_1 = n$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{20}\cdot n$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{10}\cdot n$$

Rang einer Matrix

\# linear unabhangigen Zeilen oder Spalten der Matrix

Regressormatrix $\underset{n \times k+1}{\mathbf{X}}$

Annahme: voller Spaltenrang $rk(\mathbf{X}) = k+1$

Alle Spalten von $\mathbf{X}$ mussen linear unabhängig sein

Beispiel

y_i : Zeit, die zur Vorbereitung auf die Vorlesung Ökonometrie benutzt wird

$$\boldsymbol{\iota} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } ♂ \\ 0, & \text{falls } ♀ \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } ♂ \\ 1, & \text{falls } ♀ \end{cases}$$

$$\mathbb{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

gibt es Zahlen λ_1, λ_2 für die gilt:

$$L = \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot z$$

ja: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ✓

Modellannahmen

5.5.2025

MLR 1 „linear in Parametern β"

$$y = X\beta + u$$

erlaubt: z.B x_i^2

verboten: β_1^2 oder $\beta_1 \cdot \beta_2$

MLR 2 „Zufallsstichprobe"

y, X sind zufällige Beobachtungen

ex ante: X zufällig & unbekannt z.B. $E[\hat{\beta}]$

ex post: X Stichprobe steht fest z.B: $E[\hat{\beta} \mid X]$

MLR 3 „voller Spaltenrang von X"

$$rk(X) = k+1 \quad , \quad X \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}$$

Alle $k+1$ Spalten von X sind linear unabhängig.

MLR 4 „strikte Exogenität"

$$E[u \mid X] = E[u] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

oBdA

MLR 4 $\Rightarrow$ $Cov(u, x_j) = 0$ für $j = 1, \dots, k+1$

„schwache Exogenität"

MLR 5 „Homoskedastizität & serielle Unkorreliertheit"

„gleiche Varianz"

$$\Sigma(u|X) = \sigma^2 \cdot I_n$$

Dies bedeutet: $\underline{Var(u_i|X) = \sigma^2}$ $\quad i=1,\dots,n$

$\underline{cov(u_i, u_j|X) = 0}$ $\quad i,j=1,\dots,n$ $\quad i \neq j$

MLR 6 „normalverteilte Störterme"

$$u \sim N(0, \sigma^2 \cdot I_n)$$

Schätzer für β

Lineare Funktion

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Additivität: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$
- Homogenität: $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$f(x) = A \cdot x$ ist linear

Jacobi Matrix : Matrix der 1. Ableitungen

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Falls $f(x) = A \cdot x$ dann $J_f = A'$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Spezialfall $m = 1$ (A Zeilenvektor) Jacobimatrix = „Gradient"

Quadratische Form & positive Definitheit

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = x' \cdot A \cdot x \quad , \; x \in \mathbb{R}^n \quad , \; A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Jacobimatrix = Gradient

$$J_f = \nabla_f = (A' + A)x$$

Hessematrix (Matrix der 2. Ableitungen)

$$H_F = (A' + A)' = (A')' + A' = A + A' = A' + A$$

symmetrisch

falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch: $H_f = 2 \cdot A$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv semi definit, falls

$x'Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

A positiv definit, falls

$x'Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. def. $\Rightarrow rk(A) = n$

Anwendung

Linear

Schätzer für β:

$$f(y) = A \cdot y$$

berechnen wir mit X

Linear in y

quadratische Form

Zielfunktion $S(b) : \mathbb{R}^{K+1} \to \mathbb{R}$

$$S(b) = b' A b$$

BEO: $(A' + A) b = 0$ BZO: $A' + A$ positiv definit

$\Rightarrow S$ strikt konvex

Löwner kleiner

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A „löwner kleiner" B , $A \leq B$, falls

$\underbrace{x'Ax}_{\in \mathbb{R}} \leq \underbrace{x'Bx}_{\in \mathbb{R}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow 0 \leq x'Bx - x'Ax$

$\Leftrightarrow 0 \leq (x'B - x'A)x$

$\Leftrightarrow 0 \leq x'(B-A)x$

$\Leftrightarrow B - A$ pos. semi def.

Anwendung

$$\Sigma(\hat{\beta} \mid X) \leq \Sigma(\hat{\gamma} \mid X)$$

für alle Schätzer $\hat{\gamma}$ mit

$\hat{\gamma}$ erwartungstreu für β

Inverse einer Matrix

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

B Pseudoinverse von A, falls gilt

$$\underset{n \times m}{B} \cdot \underset{m \times n}{A} = \underset{n \times n}{I}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

B Inverse von A, falls gilt

$B \cdot A = I$ und $A \cdot B = I$

- Inverse kann nur für quadratische Matrizen existieren
- Nicht jede quadratische Matrix hat eine Inverse.
- Falls Inverse existiert, dann eindeutig
- Inverse A^{-1} von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert $\Leftrightarrow$ $rk(A) = n$
- A pos. def $\Rightarrow$ $rk(A) = n$ $\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert.

Schätzer

Ein Schätzer ist eine Funktion f der Stichprobe y, X

Definitionsbereich : Alle Werte der Stichprobe

Wertebereich $\xrightarrow{\beta}$ Alle Werte der Parameter β : $\mathbb{R}^{k+1}$

$\xrightarrow{\sigma^2}$ Alle Werte der Varianz σ^2 : $\mathbb{R}_{>}$

Schätzer für β

Schätzer $f(y, X)$ ist linear in $y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y, X) = A \cdot y$$

A hängt von X ab

$f(y,X) = A \cdot y$ ist erwartungstreu für β

falls $E[f(y,x)] = \beta$ für alle $\beta \in \mathbb{R}^{k+1}$

$f(y,x)$ ist effizient falls

1. $f(y,x)$ ist erwartungstreu für β
2. $\Sigma(f(y,x)) \leq \Sigma(g(y,x))$ für alle linearen & erwartungstreuen Schätzer

Lineare erwartungstreuer Schätzer für β

- Linearer Schätzer $f(y,X) = A \cdot y$

- erwartungstreuer Schätzer

$$E[f(y,X)] = \beta \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}^{k+1}$$

zunächst:

$$E[f(y,X) \mid X] = E[A \cdot y \mid X] = A \cdot E[y \mid X]$$

gegeben X: X ist fest $\Rightarrow$ A fest

$$E[y \mid X] \overset{MLR1}{=} E[\overbrace{X\beta + u}^{=y} \mid X] = X\beta + \underbrace{E[u \mid X]}_{\substack{MLR4 \\ =0}}$$

unbekannt fest

$$E[f(y,X)\,|\,X] = E[A\cdot y\,|\,X] = \dots = AX\beta$$

Falls $AX = I$, dann $E[Ay\,|\,X] = \beta$

$$E_X\Big[\underbrace{E_y[A\cdot y\,|\,X]}_{=\beta,\ \text{falls } AX=I}\Big] = E[A\cdot y] = \beta$$

$AX = I$ ist eine hinreichende Bedingung für die Erwartungstreue von $A\cdot y$ für β.

A ist eine Pseudoinverse von X.

Varianz-Kovarianz-Matrix von $A \cdot y$ mit $AX = I$

$$\Sigma(A \cdot y \mid X) = A \cdot \underbrace{\Sigma(y \mid X)}_{?} \cdot A'$$

$$\Sigma(y \mid X) \overset{MLR1}{=} \Sigma(X\beta + u \mid X) = \Sigma(u \mid X)$$

$$\overset{MLR5}{=} \sigma^2 \cdot I_n$$

$$\Sigma(A \cdot y \mid X) = A \cdot \sigma^2 \cdot \underbrace{I_n \cdot A'}_{A'} = \sigma^2 \cdot A \cdot A'$$

Wiederholung / Zusammenfassung 12.5.26

Stichprobe: X, y

Ökonometrisches Modell: $y = X\beta + u$

unbekannt, gesucht

Linearer Schätzer: $A \cdot y$ hängt von X ab

Falls $A \cdot X = I$: $E[A \cdot y] = \beta$

$Var(u_i)$

Varianz-Kovarianz-Matrix von $A \cdot y$: $\Sigma(A \cdot y \mid X) = \sigma^2 \cdot A \cdot A'$

Gesucht: Matrix A mit $AX = I$ für die gilt:

$$A \cdot A' \leq B \cdot B' \text{ für alle } B \text{ mit } BX = I$$

Kleinste Quadrate Schätzung

Vermutung $b \in \mathbb{R}^{k+1}$ für $\beta \in \mathbb{R}^{k+1}$

Prognose: $\hat{y} = X \cdot b$

Schätzfehler (Residuum) $\hat{u} = y - \hat{y}$

Zielfunktion $S(b) = \hat{u}'\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$

$$= (y - \hat{y})'(y - \hat{y}) = (y - Xb)'(y - Xb)$$

$$= y' \cdot y + y'(-Xb) + (-Xb)'y + (-Xb)' \cdot (-Xb)$$

$$= y'y - y'Xb - b'X' \cdot y + b'X'Xb$$

$$S(b) = \dots = y'y - \underline{y'Xb} - \underbrace{b'X'\cdot y} + b'X'Xb$$

$$= (b'X'\cdot y)'$$

$$= \underline{y'Xb}$$

$$= \underbrace{y'y}_{\text{Konstante}} - \underbrace{2y'Xb}_{\text{Linear in } b} + \underbrace{b'X'Xb}_{\text{Quadratische Form}}$$

$$\frac{\partial(2y'Xb)}{\partial b} = (2y'X)' = 2X'y$$

$$\frac{\partial(b'X'Xb)}{\partial b} = \left((X'X)' + X'X\right)b = 2X'Xb$$

$$(X'X)' = X'(X')' = X'X$$

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = 0 - 2X'y + 2X'Xb \overset{BEO}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X'Xb = X'y \qquad (*)$$

Hessematrix

$$\frac{\partial^2 S(b)}{(\partial b)^2} = H_S(b) = (2X'X)' = 2X'X$$ positiv definit (Übung)

Momente Methode (mm)

Zufalls Vektoren/Matizen ~~variablen~~ X & y

mit MLR1 $y = X\beta + u$

u bestimmt y $\Rightarrow$ theoretische Annahme an u & X

MLR 4 $E[u \mid X] = E[u] = 0$

$$\mathrm{Cov}(u, X_{.j}) = E_{u, X_{.j}}\left[(u - E[u])(X_{.j} - E[X_{.j}])'\right]$$

$$= E_{X_{.j}}\left[E_u\left[(u - \overbrace{E[u \mid x]}^{E[u]=0})(X_{.j} - E[X_{.j}])' \,\middle|\, X\right]\right]$$

$$= E_X\left[\overbrace{E_u[(u - 0) \mid X]}^{=0} \cdot (X_{.j} - E[X_{.j}])'\right] = 0$$

MLR 4 $\quad E[U|X] = E[U] = 0$

„Strikte Exogenität"

$\Rightarrow$ „Schwache Exogenität": $Cov(U, X_{\cdot j}) = 0$

für $j = 1, \ldots, k+1$

$$Cov(U, X_{\cdot j}) = E[U' \cdot X_{\cdot j}] - \underbrace{E[U]}_{=0}{}' \cdot E[X_{\cdot j}]$$

$$= E[U' \cdot X_{\cdot j}] = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, k+1$$

theoretische Annahme: $E[X' \cdot U] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

theoretische Annahme: $E[X' \cdot u] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

„theoretischer Moment"

empirischer Moment: $X' \cdot \hat{u}$

Momente Methode: Wähle b so, dass

$\hat{u} = y - \hat{y}$

$\hat{y} = Xb$

$$X'\hat{u} = E[X' \cdot u]$$

also

$$X'(y - Xb) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X'y - X'Xb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'y = X'Xb \qquad (*)$$

Orthogonale Projektion

$\hat{u}$ steht senkrecht auf Spaltenraum von X

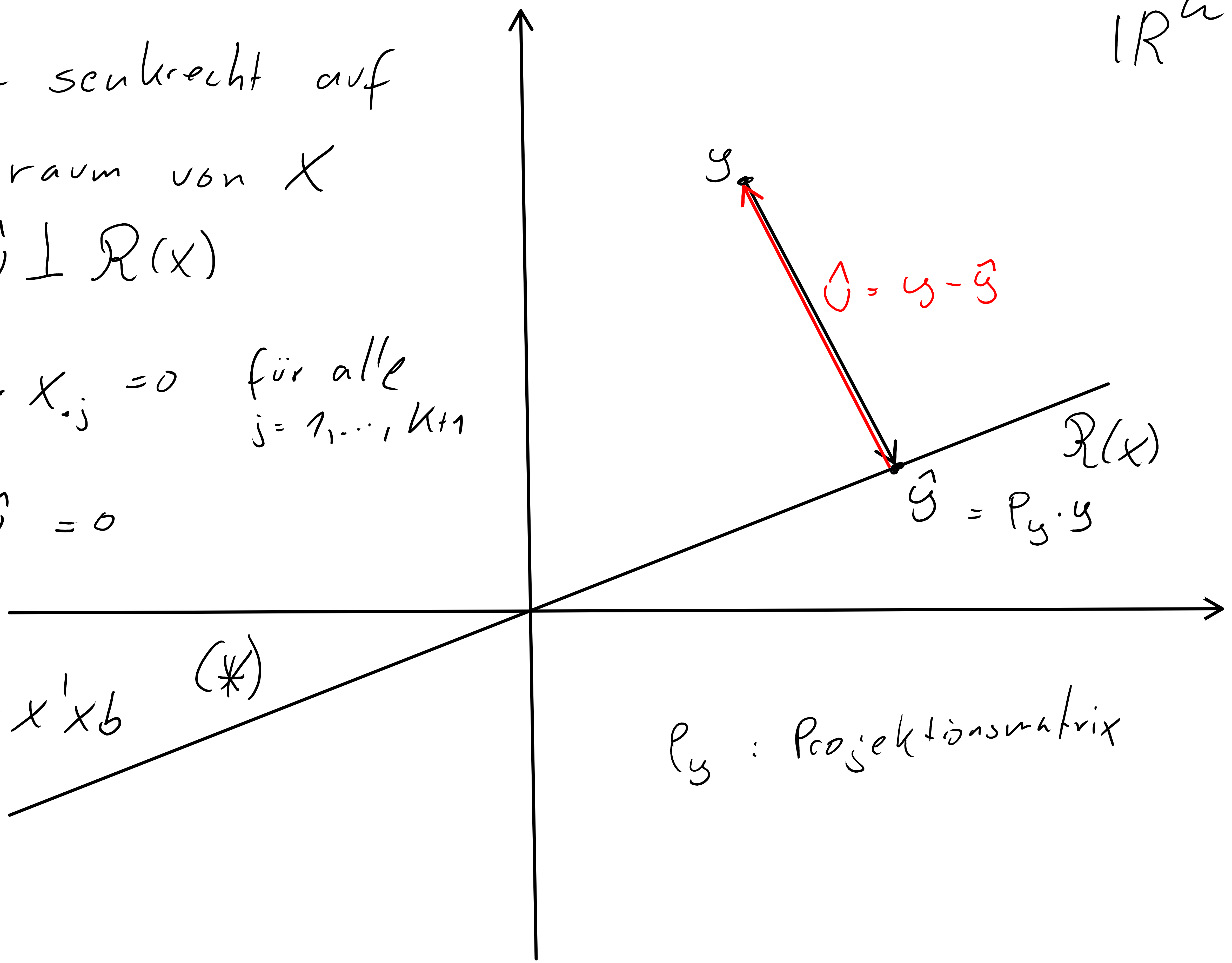
$\Leftrightarrow \quad \hat{u} \perp \mathcal{R}(X)$

$\Leftrightarrow \quad \hat{u}' \cdot X_{\cdot j} = 0$ für alle $j = 1, \dots, k+1$

$\Leftrightarrow \quad X' \cdot \hat{u} = 0$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \quad X'y = X'Xb \qquad (*)$



Lösung von

$(*)\quad X'Xb = X'y \iff \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}b = (X'X)^{-1}X'y$

$\iff b = (X'X)^{-1}X'y$

$\underset{k+1\times \underline{n}}{X'}\ \underset{\underline{n}\times k+1}{X}$ hat vollen Rang $rk(X'X) = k+1$

$\underbrace{}_{k+1\times k+1}$

$rk(X'X) = \min\{rk(X'), rk(X)\} = k+1$

MLR3: $rk(X) = k+1$

$rk(X') = k+1$

$X'X$ positiv definit, also $rk(X'X) = k+1$.

$\Rightarrow (X'X)^{-1}$ existiert

Eindeutige Lösung von

$$X'Xb = X'y$$

„Kleinste Quadrate Schätzer":

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Erwartungswert von $\hat{\beta} = \underbrace{(X'X)^{-1}}_{MLR3} X'y$

$$E[(X'X)^{-1}X'y \mid X] = (X'X)^{-1}X' E[y \mid X]$$

$$= (X'X)^{-1}X' E[\overbrace{X\beta + u}^{MLR1} \mid X]$$

$$= (X'X)^{-1}X' \left(X\beta + \overbrace{E[u \mid X]}^{=0 \ (MLR4)}\right)$$

$$= \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}\beta = \beta$$

$\hat{\beta}$ ist erwartungstreu für β

$$E_X[\underbrace{E_y[(X'X)^{-1}X'y \mid X]}_{=\beta}] = E_X[\beta] = \beta$$

Erwartungstreue (kurzes Argument)

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X'X)^{-1} X'}_{A} y$$

Resultat von vorher: Falls $A \cdot X = I$

$\Rightarrow E[Ay] = \beta$

$$A \cdot X = (X'X)^{-1} \cdot X' \cdot X = I \quad ✓$$

Varianz-Kovarianz-Matrix von $\hat{\beta}$

$$\Sigma(\hat{\beta} \mid X) = \Sigma\left((X'X)^{-1}X'y \mid X\right)$$

$$= (X'X)^{-1}X' \, \Sigma(y \mid X) \left((X'X)^{-1}X'\right)'$$

$$\Sigma(y \mid X) \overset{MLR1}{=} \Sigma(\underbrace{X\beta}_{\text{fest}} + u \mid X) = \underbrace{\Sigma(u \mid X)}_{\sigma^2 \cdot I \ (MLR5)}$$

$$\left((X'X)^{-1}X'\right)' = (X')' \cdot \left((X'X)^{-1}\right)' = X \left((X'X)'\right)^{-1} = X(X'X)^{-1}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\beta} \mid X) = (X'X)^{-1} X' \cdot \sigma^2 \cdot I \; X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} \underbrace{X' X (X'X)^{-1}}_{I}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Gauß-Markov-Theorem

Unter den Annahmen MLR1, 2, 3, 4, 5 gilt:

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X'X)^{-1}X'}_{A}y \quad \text{ist BLUE}$$

E : estimator

U : unbiased = erwartungstreu (für β)

L : linear (in y)

B : best = effizient = varianzminimal unter allen erwartungstreuen & linearen Schätzern

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}|X) = \sigma^2 (X'X)^{-1} \leq \mathbb{V}(\tilde{\beta}|X) \text{ für alle } \tilde{\beta} \text{ mit } E[\tilde{\beta}] = \beta$$

19.5.26

$$\hat{\beta} = \underbrace{(X'X)^{-1}X'}_{A}y \quad , \quad \tilde{\beta} = B\cdot y \text{ mit } BX = I$$

$$\Sigma(\hat{\beta}|X) = \sigma^2 A\cdot A' \quad , \quad \Sigma(\tilde{\beta}|X) = \sigma^2 B\cdot B'$$

zu zeigen: $A\cdot A' \le B\cdot B'$ für alle B mit $BX = I$

$\Leftrightarrow$ $BB' - AA'$ positiv semidefinit

zunächst:

$$AB' = (X'X)^{-1}X'\cdot B' = (X'X)^{-1}(\underbrace{BX}_{I})' = (X'X)^{-1}$$

$$BA' = B((X'X)^{-1}X')' = B(X')'((X'X)^{-1})' = \underbrace{BX}_{I}(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}$$

$$AA' = (X'X)^{-1}X'((X'X)^{-1}X')' = \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}$$

$$(B - A)(B - A)'$$

$$= BB' - AB' + B(-A)' - A(-A)'$$

$$= BB' - \underbrace{AB'}_{= AA'} - \underbrace{BA'}_{= AA'} + AA'$$

$$= BB' - AA'$$

positiv semidefinit

$$\Rightarrow \quad v'(BB' - AA')v$$

$$= \underbrace{v'(B - A)}_{z'}(B - A)'v = \underbrace{v'(B - A)}_{z'}\underbrace{\left[v'(B - A)\right]'}_{z}$$

$$= z' \cdot z \geq 0$$

Schätzer für σ^2

X_i Zufallsvariable $\quad i = 1, \dots, n \quad$ iid

$E[X_i] = \mu \qquad Var(X_i) = \sigma^2$

$\bar{X} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Regressionsmodell $\quad y = X\beta + u \quad , \quad E[u] = 0, \ \mathbb{V}(u|X) = \sigma^2 I$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})^2$$

mit $\bar{\hat{u}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$

Projektion

BEO von $\hat{\beta}$: $\quad X' \cdot \hat{u} = 0$

$\mathbb{R}^n$

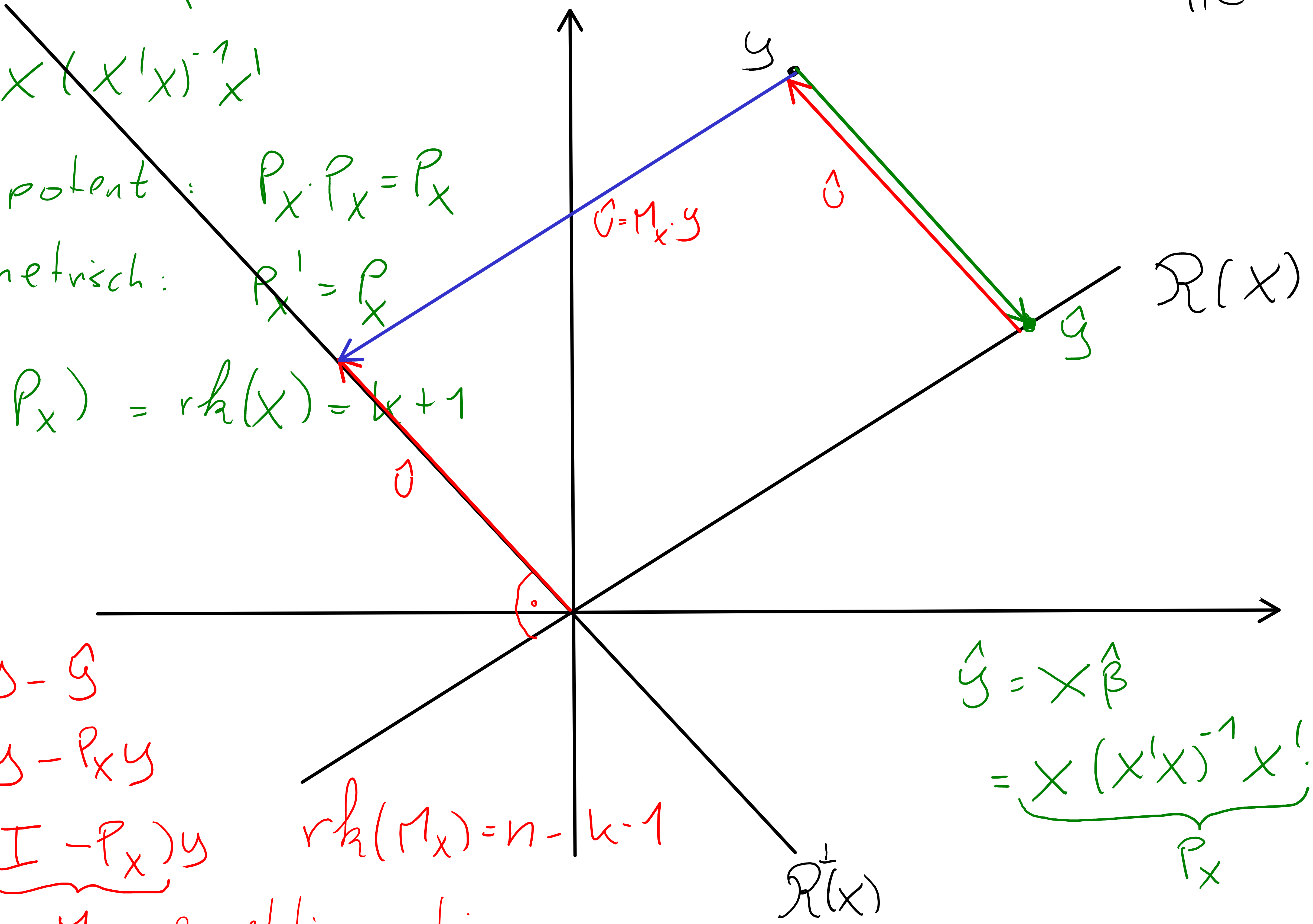
Projektionsmatrix

$$P_X = X(X'X)^{-1}X'$$

idempotent: $\quad P_X \cdot P_X = P_X$

symmetrisch: $\quad P_X' = P_X$

$$rk(P_X) = rk(X) = k+1$$



$$\hat{u} = y - \hat{y}$$
$$= y - P_X y$$
$$= \underbrace{(I - P_X)}_{M_X} y$$

M_X Projektionsmatrix

$$rk(M_X) = n - k - 1$$

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$
$$= \underbrace{X(X'X)^{-1}X'}_{P_X} \cdot y$$

$$\hat{u} = M_X y \qquad \text{mit } M_X = I - P_X$$

$$P_X = X(X'X)^{-1}X'$$

$$= M_X(X\beta + u) \qquad \text{MLR1} \quad y = X\beta + u$$

$$= M_X X\beta + M_X \cdot u$$

$$= [I - X(X'X)^{-1}X']X\beta + M_X \cdot u$$

$$= [X - X\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}]\beta + M_X \cdot u$$

$$= [X - X]\beta + M_X u$$

$$= M_X \cdot u$$

Streuungszerlegung

$$\hat{u} = y - \hat{y}$$
$$\Leftrightarrow \hat{y} + \hat{u} = y$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \underbrace{\bar{\hat{y}}}_{=\bar{y}})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_i - \underbrace{\bar{\hat{u}}}_{=0})^2$$

Es gilt $SST = SSE + SSR$

Begründung für $\hat{u} = 0$

BEO für $\hat{\beta}$: $X' \cdot \hat{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k+1$ nullen

Erste Spalte von X: $\iota = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ erste Zeile von X'

Erste Zeile von $X'\hat{u}$: $(1, 1, \dots, 1) \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \hat{u}_i = 0$

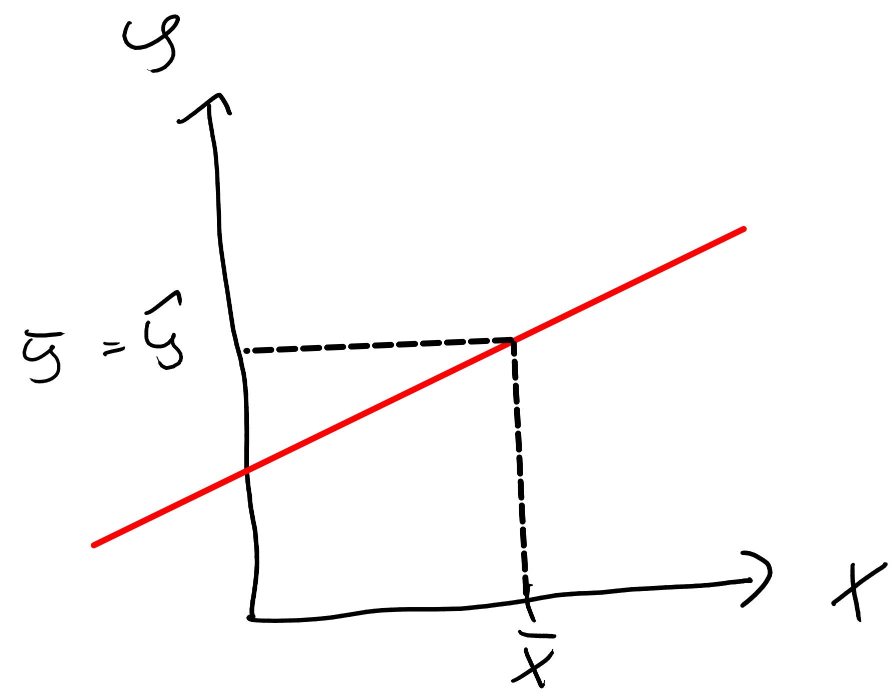
$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0$

Begründung für $\bar{\hat{y}} = \bar{y}$

$$\hat{y} + \hat{u} = y$$

$$\Leftrightarrow \iota' \cdot \hat{y} + \underbrace{\iota' \hat{u}}_{=0} = \iota' y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$



$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \hat{u}'\hat{u}$$

Begründung für SST = SSE + SSR

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y} + \hat{u}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i + \hat{u}_i^2 \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{SSE} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})\hat{u}_i}_{\text{zu zeigen: } = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}_{SSR}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y}) \hat{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \cdot \hat{u}_i}_{= \hat{y}' \cdot \hat{u}} - \bar{y} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i}_{=0}$$

kurze Begründung $\hat{y} \in \mathcal{R}(X)$, $\hat{u} \in \mathcal{R}^{\perp}(X)$

$$\Rightarrow \hat{y}' \hat{u} = 0$$

ausführliche Begründung

$\hat{y} = P_X y$, $\hat{y}' \hat{u} = (P_X \cdot y)' M_X y = \underbrace{y' P_X M_X \cdot y}_{=0}$

$\hat{u} = M_X \cdot y$

$$P_X M_X = P_X (I - P_X) = P_X - P_X P_X = P_X - P_X = 0$$

Bestimmtheitsmaß R^2

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

Aussage $R^2 \cdot 100\,\%$ ist der Anteil der erklärten Variation von y.

Vorteil von vielen Regressoren: R^2 steigt.

ursprüngliche Regressormatrix X

plus ein (linear unabhängiger) Regressor $\tilde{X}$

neues Bestimmtheitsmaß $\tilde{R}^2$

Behauptung $\tilde{R}^2 \geq R^2$

OLS Schätzer $\hat{\beta}$ minimiert SSR

neuer Schätzer $\tilde{\beta}$ minimiert $\widetilde{SSR} \leq SSR$

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{\widetilde{SSR}}{SST} \geq 1 - \frac{SSR}{SST} = R^2$$

$$\widetilde{SST} = SST$$

Spur einer Matrix (quadratisch)

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Rechenregel:

$$tr(\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times n}{B}) = tr(\underset{n\times n}{B} \cdot \underset{n\times n}{A})$$

$$tr(A\,B\,C) = tr(C\,A\,B) = tr(B\,C\,A)$$

(zyklische Vertauschung)

P_X Projektionsmatrix:

$$tr(P_X) = \underbrace{rk(P_X)}_{=k+1}\ , \quad tr(M_X) = \underbrace{rk(M_X)}_{n-k-1}$$

Schätzer für σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}_{SSR} = \frac{1}{n-k-1} \cdot \underbrace{\hat{u}' \cdot \hat{u}}_{SSR}$$

$$\hat{u} = M_X \cdot u$$

$$\hat{u}' \hat{u} = (M_X \cdot u)' M_X u = u' M_X' M_X u$$

$$= u' M_X \cdot M_X u = u' M_X u \in \mathbb{R}$$

$$= tr(u' M_X u)$$

$$= tr(u u' M_X)$$

$$E[\hat{u}'\hat{u} \mid X] = E[tr(uu'M_X) \mid X]$$

tr ist ein linearer Operator

E ist auch ein linearer Operator

tr und E können vertauscht werden

$$= tr(E[uu'M_X \mid X])$$

$$= tr(E[uu' \mid X] M_X)$$

$$= tr(\underbrace{E[(u - \underbrace{E[u]}_{=0})(u - \underbrace{E[u]}_{=0})' \mid X]}_{\Sigma(u \mid X)} M_X)$$

$$= tr\,(\underbrace{\cancel{E}(u\,|\,X)}_{= \sigma^2 \cdot I} \cdot M_X)$$

$\sqrt{\hat{\sigma}^2} : \hat{\sigma}$

„Standardfehler der Regression"

$$= tr\,(\sigma^2 \cdot M_X)$$

$$= \sigma^2 \; tr\,(M_X)$$

$$= \sigma^2 \cdot rk\,(M_X) = \sigma^2 \cdot (n-k-1)$$

gezeigt: $E[\hat{u}'\hat{u}\,|\,X] = \sigma^2 \cdot (n-k-1)$

$$\Leftrightarrow E\Big[\underbrace{\frac{1}{n-k-1} \cdot \hat{u}'\hat{u}}_{\hat{\sigma}^2} \,\Big|\, X\Big] = \sigma^2$$