

# Anwendungen der Differentialrechnung



Moodle



Lehrbuch

---

<sup>1</sup>Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

7.1 Implizites Differenzieren

7.3 Ableitung der Inversen

7.4 Lineare Approximation

7.5 Polynomiale Approximation

7.7 Elastizitäten

7.8 Stetigkeit

7.9 Mehr über Grenzwerte

7.10 Der Zwischenwertsatz

7.12 Regel von L'Hôpital

## 7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$xf(x) = 18$$

$$\sqrt{f(x)} = x$$

$$f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$$

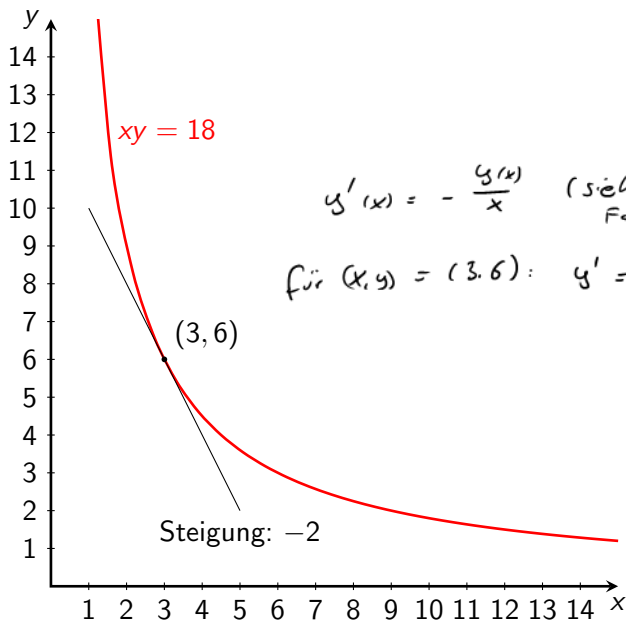
Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

# Implizite Differentiation

Wenn zwei Variablen  $x$  und  $y$  durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du die Ableitung  $y'$  so:

- (i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach  $x$ . Betrachte dabei  $y$  als Funktion von  $x$ .
- (ii) Löse die resultierende Gleichung nach  $y'$  auf.

Beispiel:  $xf(x) = 18$  für  $x > 0$



$$x \cdot y(x) = 18$$

hier:  $f(x) = x \leadsto f'(x) = 1$

$$g(x) = y(x) \leadsto g'(x) = y'(x)$$

Ableiten auf beiden Seiten:

$$1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = 0 \quad | -y(x)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot y'(x) = -y(x) \quad | : x \quad (\text{für } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Alternativ:

$$x \cdot y(x) = 18 \quad | : x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{18}{x} = 18 \cdot x^{-1}$$

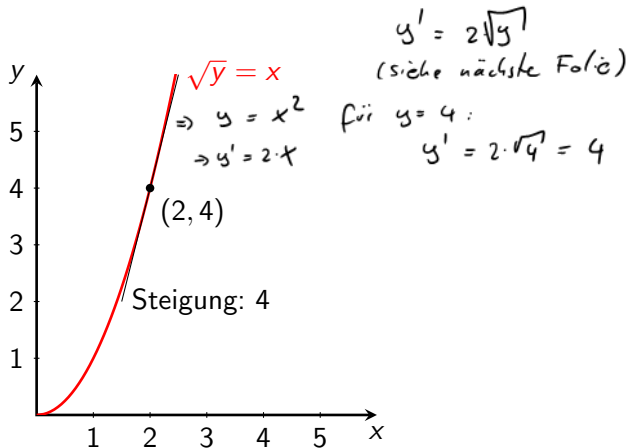
$$y'(x) = -1 \cdot 18 \cdot x^{-2}$$

$$= -\frac{18}{x^2}$$

für  $x=3$

$$y'(3) = -\frac{18}{9} = -2$$

Beispiel:  $\sqrt{f(x)} = x$  für  $f(x), x > 0$



$$\sqrt{y(x)} = x$$

$$\text{hier } f(y) = \sqrt{y} \rightsquigarrow f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}})$$

$$g(x) = y(x) \rightsquigarrow g'(x) = y'(x)$$

Ableiten auf beiden Seiten:

$$\frac{1}{2\sqrt{y(x)}} \cdot \underbrace{y'(x)}_{g'(x)} = 1 \quad | \cdot 2\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = 2\sqrt{y}$$

Kettenregel

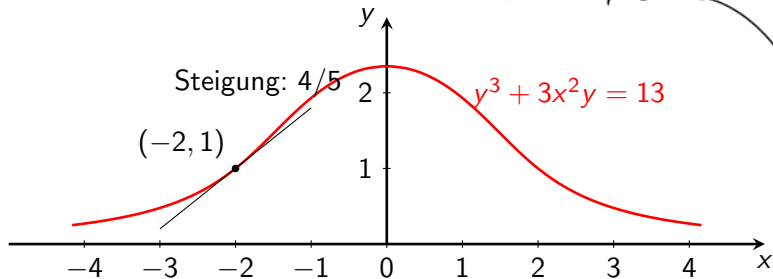
$$\left( f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel:  $f(x)^3 + 3x^2f(x) = 13$

$$y'(x) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

(siehe nächste Folie)

$$x = -2, y = 1$$



$$\begin{aligned} \rightarrow y'(-2) &= -\frac{2(-2) \cdot 1}{(-2)^2 + 1^2} \\ &= -\frac{-4}{4 + 1} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$y^3 + 3x^2 \cdot y = 13$$

äußere Fkt:  $f(y) = y^3 \leadsto f'(y) = 3 \cdot y^2$

innere Fkt:  $g(x) = y(x) \leadsto g'(x) = y'(x)$

Ableiten auf beiden Seiten:

$$3 \cdot y^2 \cdot y'(x) + 3 \cdot 2x \cdot y + 3x^2 \cdot y'(x) = 0$$

$$| -6xy$$

$$| : 3$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 \cdot y'(x) + 3x^2 \cdot y'(x) = -6xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 \cdot y'(x) + x^2 \cdot y'(x) = -2xy$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + x^2) y'(x) = -2xy$$

$$| : (y^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

## 7.3 Ableitung der Inversen

$$g(\overset{=y}{f(x)}) = x$$

leite  $\nearrow$  auf beiden Seiten nach  $x$  ab.

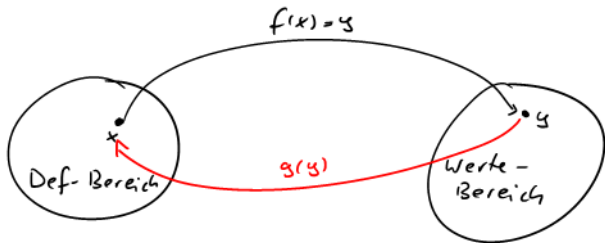
Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion mit der inversen Funktion  $g$ .

Wenn für einen inneren Punkt  $x_0$  gilt  $f'(x_0) \neq 0$ , dann ist  $g$  differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$  und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\left(g(f(x))\right)' = \underbrace{g'(f(x))}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}} = 1 \quad | : f'(x) \neq 0$$
  
$$\Leftrightarrow g'(\overset{=y}{f(x)}) = \frac{1}{f'(x)}$$

Funktion



Umkehrfunktion  $f^{-1}(y) = g(y)$

$$f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y$$

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x$$

## Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Es gelte  $f(x) = \sqrt{x}$ . (für  $x > 0$ )  $\leadsto g(y) = y^2$

Wie lauten  $f'(x)$ ,  $g(y)$  und  $g'(y)$ ?  $g'(y) = \underline{2 \cdot y}$

$$f(x) = \sqrt{x} \leadsto f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$g(f(x)) = \underline{x}$$

hier:  $(f(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x \quad \checkmark$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

hier  $g'(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 2f(x) = \underline{2y} \quad \checkmark$

## 7.4 Lineare Approximation

Für  $x$  in der Nähe von  $x_0$  gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls  $f$  linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

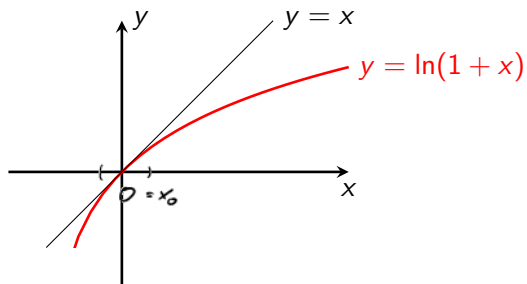
(Siehe Gleichung einer Tangente.)

$$f(x) = mx + b \quad \leadsto \quad f'(x) = m$$

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &= mx_0 + b + m(x - x_0) \\ &= \cancel{mx_0} + b + mx - \cancel{mx_0} \\ &= mx + b = f(x) \end{aligned}$$

# Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel:  $f(x) = \ln(1 + x)$



# Lineare Approximation: Übung

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Wie lautet die lineare Approximation von

$$f(x) = \ln(1+x)$$

in der Nähe eines beliebigen Punktes  $x_0 > -1$ ?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0}(x-x_0) \\ &= \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0} \cdot x - \frac{1}{1+x_0} \cdot x_0 \\ &= \frac{1}{1+x_0} \cdot x + \underbrace{\ln(1+x_0) - \frac{1}{1+x_0} \cdot x_0}_b \end{aligned}$$

$$x_0=0: \underbrace{\ln(1+x)}_y \approx \frac{1}{1+0} \cdot x + \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} - \frac{1}{1+0} \cdot 0 = x + 0$$

# Das Differential einer Funktion

Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion und  $dx \neq 0$  eine beliebige Änderung der Variablen  $x$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

**Differential** von  $y = f(x)$ :

$$dy = f'(x)dx$$

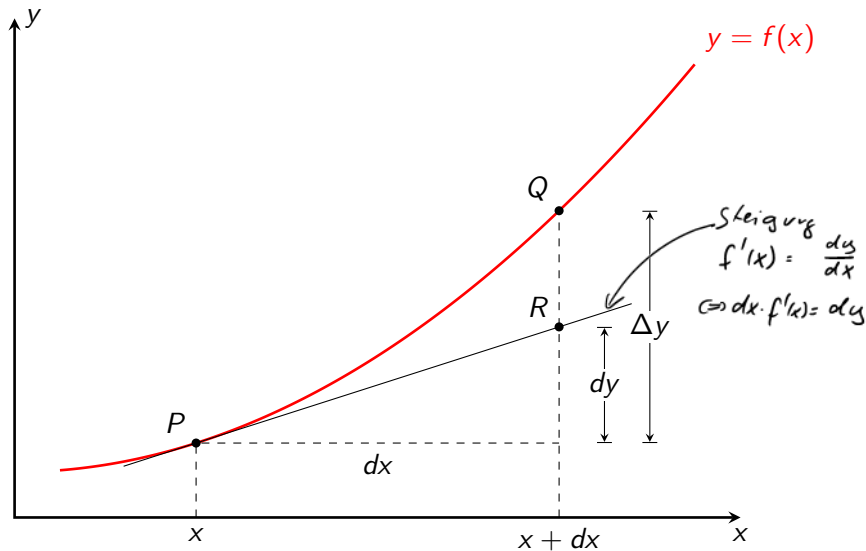
**Differenz** des Funktionswertes  $y = f(x)$ :

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Für  $dx$  klein gilt

$$\Delta y \approx dy$$

# Darstellung des Differentials $dy$ und der Differenz $\Delta y$



# Differenz und Differential: Übung

Berechne das Differential  $dy$  und die Differenz  $\Delta y$  für folgende Funktion:

$$f(x) = 1 + x^2 \quad \leadsto \quad f'(x) = 2 \cdot x$$

Begründe, warum  $dy \approx \Delta y$  für  $dx$  klein.

$$dy = f'(x) \cdot dx = 2 \cdot x \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+dx) - f(x) = 1 + (x+dx)^2 - (1 + x^2) \\ &= \cancel{1} + \cancel{x^2} + 2 \cdot x \cdot dx + (dx)^2 - \cancel{1} - \cancel{x^2} = 2 \cdot x \cdot dx + (dx)^2 \end{aligned}$$

$dx$	$(dx)^2$
1	1
0.1	0.01
0.01	0.0001
0.001	0.000001

## 7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an  $f(x)$  um  $x = x_0$

Für  $x$  in der Nähe von  $x_0$  gilt:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Lineare Approximation}} + \frac{1}{2} \overbrace{f''(x_0)}^{\text{2. Ableitung}} (x - x_0)^2$$

Für  $x_0 = 0$  gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

# Quadratische Approximation: Übung

Wie lautet die quadratische Approximation von

$$f(x) = \ln(1+x)$$

in der Nähe  $x = x_0$ ?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\ln(1+x) \approx \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0}(x-x_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x_0)^2}(x-x_0)^2$$

für  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\approx \overbrace{\ln(1+0) + \frac{1}{1+0}(x-0)}^{=x} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+0)^2}(x-0)^2 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

## 7.7 Elastizitäten

Wenn  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar und  $f(x) \neq 0$  ist, dann ist die **Elastizität von  $f$**  bezüglich  $x$  gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument  $x$  um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert  $f(x)$  um  $El_x f(x)\%$ .

# Beispiele

$$EL_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \\ (\varepsilon)$$

▶  $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$EL_x f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

für  $x=100$   $\sqrt{100} = 10$   
 $x'=101$   $\sqrt{101} \approx 10,05$

$$\frac{\sqrt{101} - \sqrt{100}}{\sqrt{100}} = \frac{10,05 - 10}{10} = \frac{0,05}{10}$$
$$= \frac{0,5}{100} = 0,5\%$$

▶  $g(x) = x^2$

$$g'(x) = 2x$$

$$EL_x g(x) = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{x^2} = \frac{2 \cdot x^2}{x^2} = 2$$

▶  $h(x) = Ax^r$

$$h'(x) = r \cdot Ax^{r-1}$$

$$r \cdot Ax^{r-1} \cdot \frac{x}{Ax^r}$$

$$= \frac{r \cdot Ax^{r-1} \cdot x^1}{Ax^r} = \frac{r \cdot Ax^r}{Ax^r} = r$$

für  $x=100$

$$\frac{101^2 - 100^2}{100^2} = \frac{10201 - 10000}{10000} = \frac{201}{10000}$$
$$= \frac{2,01}{100} = 2,01\%$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

# Relative Änderungen

$$\% \text{-Änderung des Funktionswertes } f(x) : \frac{\overbrace{f(x+dx) - f(x)}^{\Delta f}}{f(x)} = \frac{\Delta f}{f(x)}$$

$$\% \text{-Änderung der Variablen } x : \frac{x+dx - x}{x} = \frac{dx}{x}$$

Rate der relativen Änderungen:

$$\frac{\% \text{-Änderung } f(x)}{\% \text{-Änderung } x} = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\Delta f}{f(x)} \cdot \frac{x}{dx} = \frac{\Delta f}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Falls  $dx$  klein:  $\Delta f \approx df$  und

$$\frac{\% \text{-Änderung } f(x)}{\% \text{-Änderung } x} \approx \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)}$$

## Preiselastizität der Nachfrage: Übung

$$D(p) = \begin{cases} 8 - \frac{4}{3}p & \text{falls } p < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne den Graph von  $D$  in ein Diagramm.  
Trage hierbei den Preis auf der vertikalen Achse ein.
2. Berechne die Elastizität von  $D$  für  $0 \leq p < 6$
3. Kennzeichne die Bereiche  $El_p D(p) < -1$  und  $El_p D(p) > -1$ .

Preis  $p$

$$EL_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$$D(p) = 8 - \frac{4}{3}p, \quad p < 6$$

$$D(0) = 8$$

$$D(3) = 8 - \frac{4}{3} \cdot 3 = 8 - 4 = 4$$

$$D(6) = 8 - \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 - 4 \cdot 2 = 0$$

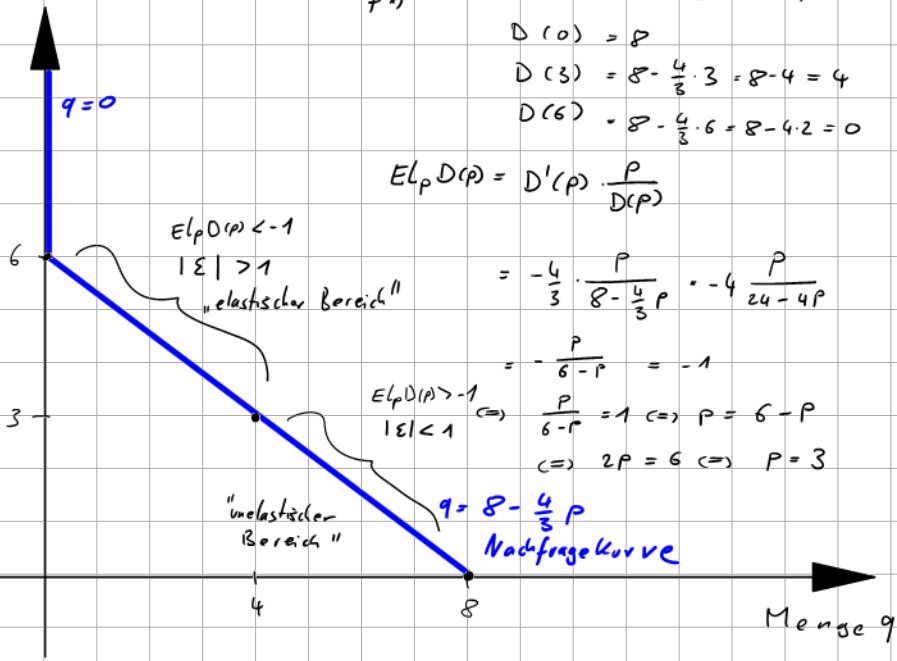
$$EL_p D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{p}{8 - \frac{4}{3}p} = -4 \frac{p}{24 - 4p}$$

$$= -\frac{p}{6-p} = -1$$

$$EL_p D(p) > -1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{p}{6-p} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad p = 6 - p$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 2p = 6 \quad (\Leftrightarrow) \quad p = 3$$



# Elastizität eines Produktes von Funktionen

Die Elastizität eines Produktes von Funktionen ist die Summe der Elastizitäten der Funktionen:

$$(f(x)g(x))' \frac{x}{f(x)g(x)} = f'(x) \frac{x}{f(x)} + g'(x) \frac{x}{g(x)}$$

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' \cdot \frac{x}{f(x)g(x)} &= (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \cdot \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} \\ &= \cancel{f'(x)} \cdot \cancel{g(x)} \cdot \frac{x}{f(x) \cdot \cancel{g(x)}} + \cancel{f(x)} \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{\cancel{f(x)} \cdot g(x)} \end{aligned}$$

## Preiselastizität des Erlöses

Sei  $R(p) = D(p)p$  der Erlös.

Die Elastizität der Erlösfunktion  $R(p)$  bezüglich des Preises  $p$  ist:

$$El_p R(p) = \frac{dR(p)}{dp} \frac{p}{R(p)} = El_p D(p) + \underbrace{El_p P}_{=1} = El_p D(p) + 1 = 0$$

Wann ist die Elastizität des Erlöses gleich null?

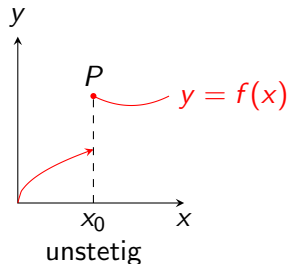
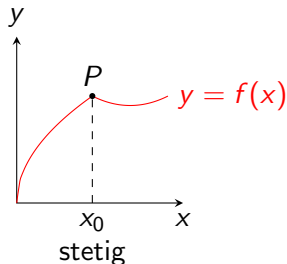
$$El_p D(p) = -1$$

$$El_p P = \frac{dP}{dP} \cdot \frac{P}{P} = 1$$

## 7.8 Stetigkeit

Die Funktion  $f$  ist **stetig** an der Stelle  $x = x_0$  genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



# Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn  $f$  und  $g$  stetig in  $x_0$  sind, so gilt:

- (a)  $f + g$  und  $f - g$  sind stetig in  $x_0$ .
- (b)  $fg$  und  $f/g$ , falls  $g(x_0) \neq 0$ , sind stetig in  $x_0$ .
- (c)  $(f(x))^r$  ist stetig in  $x_0$ , falls  $(f(x))^r$  definiert ist, wobei  $r \in \mathbb{R}$ .
- (d) Wenn  $f$  eine Inverse hat auf dem Intervall  $I$ , so ist die Inverse  $f^{-1}$  stetig auf  $f(I)$ .

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

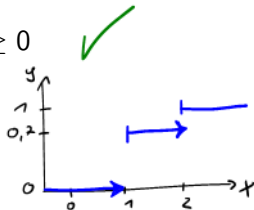
# Stetigkeit: Übung

Welche der drei folgenden Funktionen ist/sind stetig?

$$f(x) = x^2 - 1 + 4\sqrt{x} - (1+x)^2, \quad x \geq 0$$

$$\times g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 0,7 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

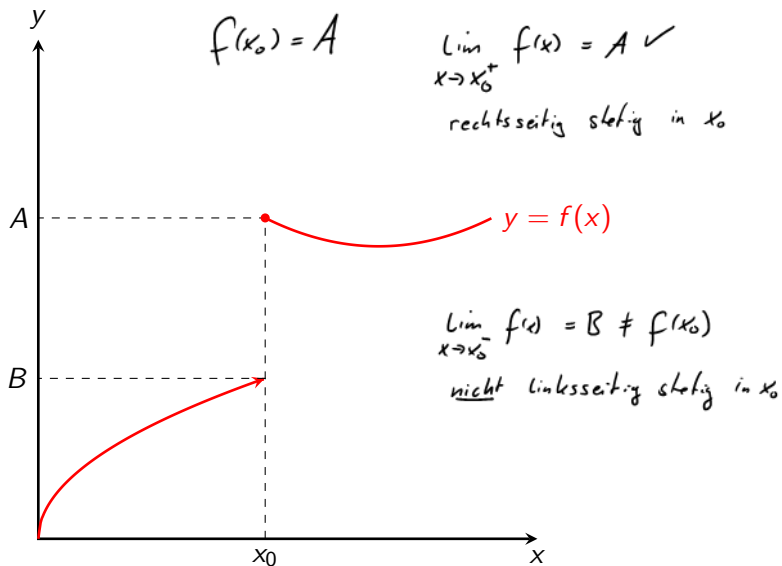


$$h(1) = 1 \quad \leftarrow = \checkmark$$

$$h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$$

„x nähert sich 1 von rechts“

## 7.9 Mehr über Grenzwerte: Fehlender Grenzwert



# Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$  strebt gegen  $B$ , wenn  $x$  gegen  $x_0$  von links strebt und  $f(x)$  strebt gegen  $A$ , wenn  $x$  gegen  $x_0$  von rechts strebt.

## Notation:

Linksseitiger Grenzwert  $B$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert  $A$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} A$$

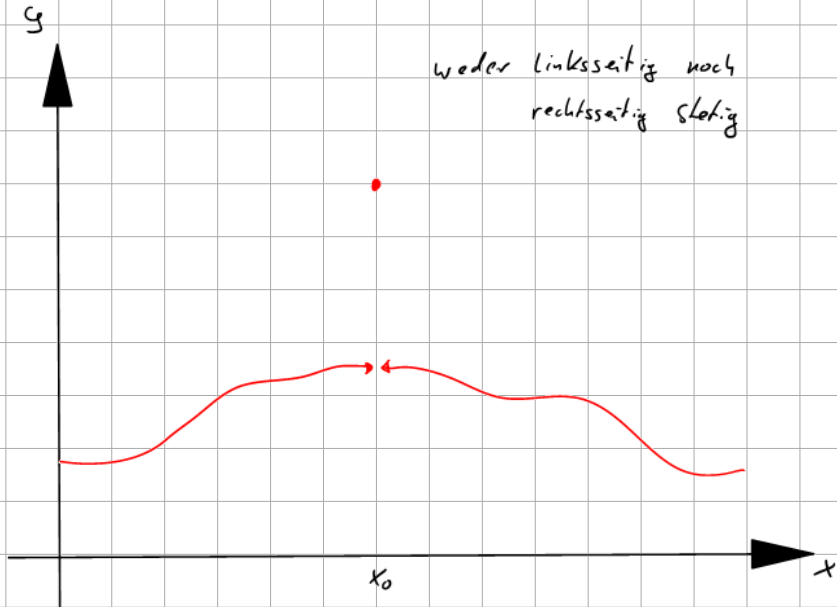
# Einseitige Stetigkeit

Sei  $f$  eine Funktion deren Definitionsbereich ein offenes Intervall  $(a, b)$  enthält.

$f$  ist **linksseitig stetig** in  $x_0 \in (a, b]$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

$f$  ist **rechtsseitig stetig** in  $x_0 \in [a, b)$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

$f$  ist **stetig** auf  $[a, b]$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in (a, b]$  linksseitig stetig und in jedem Punkt  $x_0 \in [a, b)$  rechtsseitig stetig ist.



# Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$  hat den Grenzwert  $A$ , wenn  $x$  gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$  kann beliebig nahe an  $A$  gewählt werden, indem man  $x$  hinreichend groß wählt.

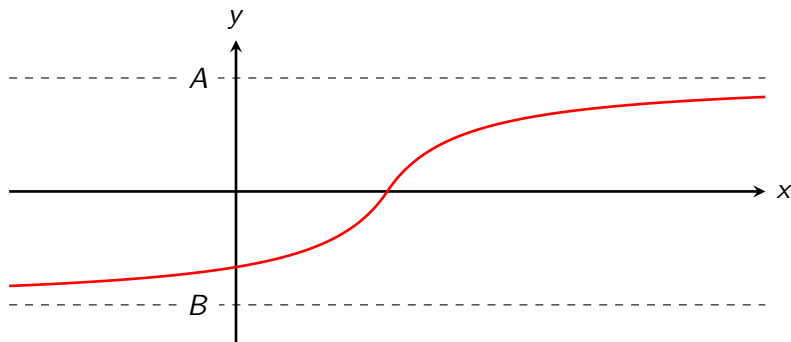
Notation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$$

Analog:

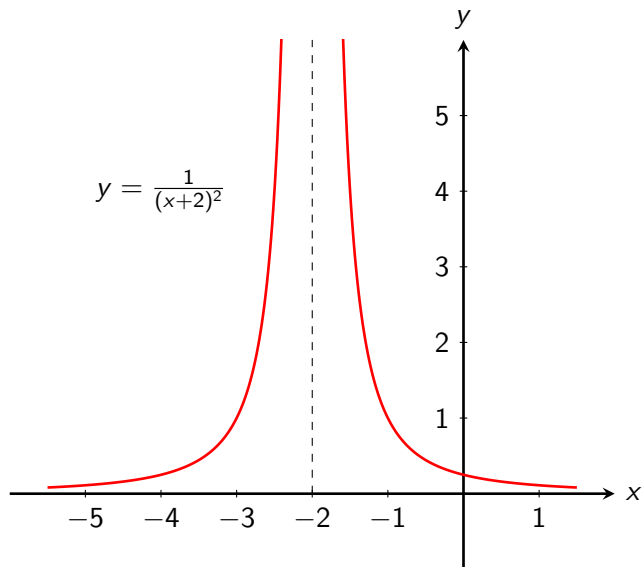
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} B$$

# Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$$

## Grenzwert im Unendlichen: vertikale Asymptote



# Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Falls die Funktionswerte von  $f$  und  $g$  mit  $x \rightarrow x_0$  gegen unendlich streben, schreiben wir  $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ .

Dann gilt:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \text{ und } f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \text{ mit } x \rightarrow x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von  $f(x) - g(x)$  und  $f(x)/g(x)$ , wenn  $x \rightarrow x_0$ .

# Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

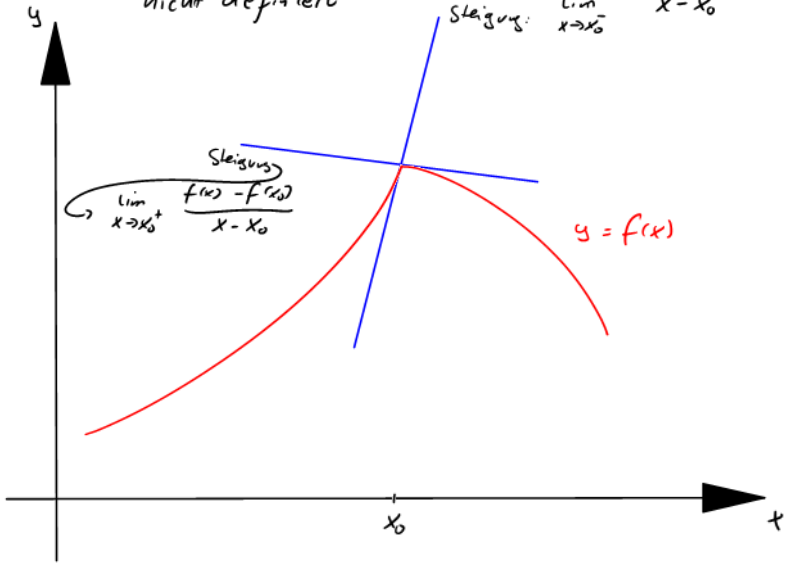
die **linksseitige Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$

und

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Ableitung an der Stelle  $x_0$   
nicht definiert



# Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.

Beispiel:  $f(x) = |x| = \max \{ x, -x \}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$\Rightarrow |x|$  stetig in  $x_0 = 0$

---

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

ist nicht diff'bar in  $x_0 = 0$

# Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

$$f \text{ diff'bar} \Rightarrow f \text{ stetig}$$

Kontraposition

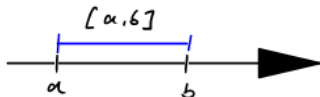
$$\underline{f \text{ unstetig}} \Rightarrow f \text{ nicht diff'bar}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad , \quad B \neq A$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right) - f(x_0)}{\left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} x \right) - x_0} = \frac{B - f(x_0)}{x_0 - x_0} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \dots = \frac{A - f(x_0)}{x_0 - x_0} \end{aligned}$$

↗ ≠ ↘

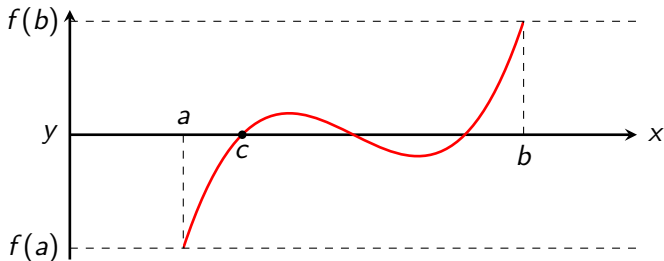
## 7.10 Der Zwischenwertsatz



↓ Intervall abgeschlossen } „Kompakt“  
beschränkt

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  wenigstens ein  $c \in [a, b]$  sodass  $f(c) = y$ .



# Anwendung Existenz Marktgleichgewichtes

D Nachfragefunktion

S Angebotsfunktion

- D, S stetig
- $D(0) > S(0)$
- Es gibt einen Preis  $\bar{p}$  mit  $D(\bar{p}) < S(\bar{p})$

Behauptung: Es gibt einen Preis  $p^*$  mit  $D(p^*) = S(p^*)$

Begründung

Überschussnachfrage  $Z(p) = D(p) - S(p)$

$Z$  auf  $[0, \bar{p}]$  stetig

$$Z(0) = D(0) - S(0) > 0$$

$$Z(\bar{p}) = D(\bar{p}) - S(\bar{p}) < 0$$

Zwischenwertsatz:

$\gamma=0$ : es gibt ein  $p^* \in [0, \bar{p}]$   
mit  $Z(p^*) = 0$

$$\Leftrightarrow D(p^*) = S(p^*)$$

# 7.12 Regel von L'Hôpital

## Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien  $f$  und  $g$  zwei stetige Funktionen mit  $g(x_0) = 0$  für ein  $x_0$ .

Für  $f(x_0) > 0$  gilt:  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ .

Für  $f(x_0) < 0$  gilt:  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ .

Was passiert für  $f(x_0) = 0$ ?

# Regel von L'Hôpital

Seien  $f$  und  $g$  zwei differenzierbare Funktionen mit  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ .

Falls  $g'(x_0) \neq 0$ , dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) : (x - x_0)}{g(x) - g(x_0) : (x - x_0)}$$

$$= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$x \neq x_0$$

$$x - x_0 \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Kostenfunktion

$$C(q) = F + C_v(q)$$

↑  
Fixkosten

↑  
variable Kosten

"Ø"-

Durchschnittskosten

$$AC(q) = \underbrace{\frac{F}{q}}_{AFC} + \underbrace{\frac{C_v(q)}{q}}_{AVC} \quad \text{für } q > 0$$

$$C_v(0) = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} AVC(q)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C_v(q)}{q}$$

L'Hôpital

$$\downarrow = \frac{\frac{dC_v(q)}{dq}}{\frac{dq}{dq}}$$

$$= \frac{C_v'(q) \Big|_{q=0}}{1} = C_v'(0)$$

$$C'(q) = (F + C_v(q))' = C_v'(q)$$

# Zusammenfassung

- ▶ Implizites Differenzieren
- ▶ Ableitung der Inversen
- ▶ Approximation
- ▶ Elastizitäten
- ▶ Stetigkeit
- ▶ Zwischenwertsatz
- ▶ L'Hôpital