Vorlesung zu Kapitel 07:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
xf(x) &= 18 \\
\sqrt{f(x)} &= x \\
f(x)^3 + 3x^2 f(x) &= 13
\end{aligned}
$$

Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

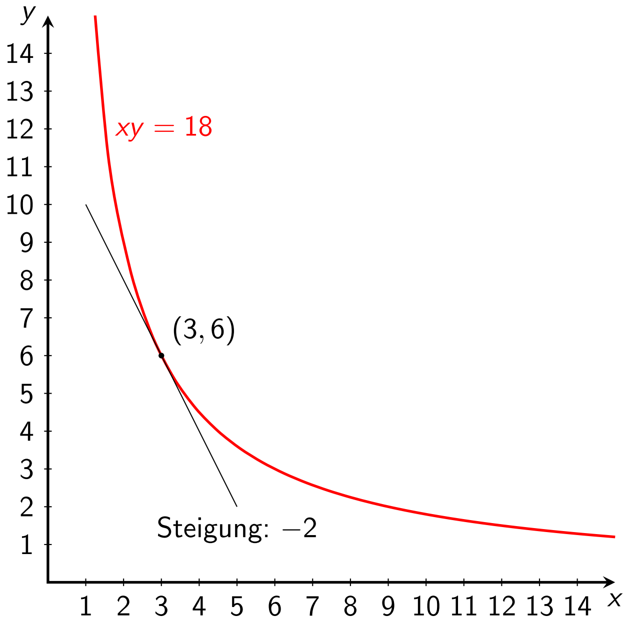
Implizite Differentiation

Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du die Ableitung y' so:

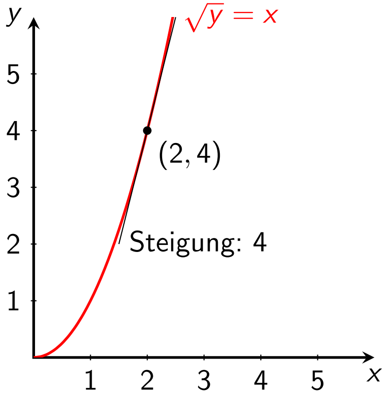
(i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x. Betrachte dabei y als Funktion von x.

(ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

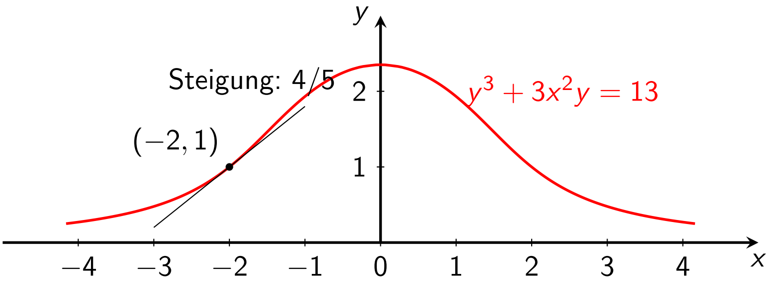
Beispiel: $xf(x) = 18$ für $x > 0$



Beispiel: $\sqrt{f(x)} = x$ für $f(x), x > 0$



Beispiel: $f(x)^3 + 3x^2 f(x) = 13$



7.3 Ableitung der Inversen

Sei f eine differenzierbare Funktion mit der inversen Funktion g.

Wenn für einen inneren Punkt x_0 gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Es gelte $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x),\ g(y)$ und $g'(y)$?

7.4 Lineare Approximation

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

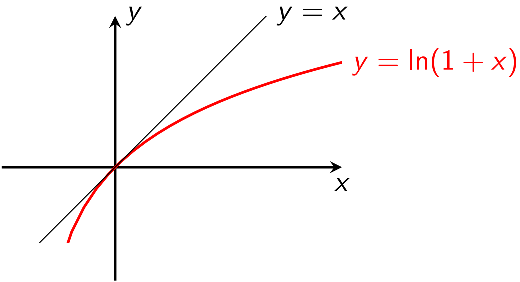
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

(Siehe Gleichung einer Tangente.)

Beispiel: Lineare Approximation

Beispiel: $f(x) = \ln(1 + x)$



Lineare Approximation: Übung

Wie lautet die lineare Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe eines beliebigen Punktes $x_0 > -1$?

Das Differential einer Funktion

Sei f eine differenzierbare Funktion und $dx \neq 0$ eine beliebige Änderung der Variablen x

Differential von $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$

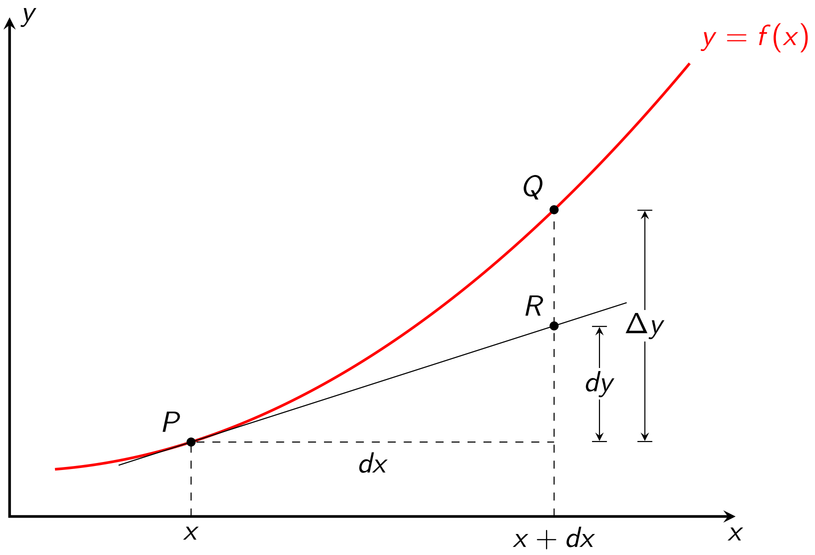
Differenz des Funktionswertes $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Für dx klein gilt

$$\Delta y \approx dy$$

Darstellung des Differentials dy und der Differenz Δy



Differenz und Differential: Übung

Berechne das Differential dy und die Differenz Δy für folgende Funktion:

$$f(x) = 1 + x^2$$

Begründe, warum $dy \approx \Delta y$ für dx klein.

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

Quadratische Approximation: Übung

Wie lautet die quadratische Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe $x = x_0$?

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von** f bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$%.

Beispiele

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = Ax^r$

Relative Änderungen

%-Änderung des Funktionswertes $f(x)$:

%-Änderung der Variablen x :

Rate der relativen Änderungen:

$$\frac{\text{\%-Änderung } f(x)}{\text{\%-Änderung } x} =$$

Falls dx klein: $\Delta f \approx df$ und

$$\frac{\text{\%-Änderung } f(x)}{\text{\%-Änderung } x} \approx$$

Preiselastizität der Nachfrage: Übung

$$D(p) = \begin{cases} 8 - \frac{4}{3}p & \text{falls } p < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne den Graph von D in ein Diagramm.
   Trage hierbei den Preis auf der vertikalen Achse ein.
2. Berechne die Elastizität von D für $0 \leq p < 6$
3. Kennzeichne die Bereiche $El_p D(p) < -1$ und $El_p D(p) > -1$.

Elastizität eines Produktes von Funktionen

Die Elastizität eines Produktes von Funktionen ist die Summe der Elastizitäten der Funktionen:

$$(f(x)g(x))' \frac{x}{f(x)g(x)} = f'(x)\frac{x}{f(x)} + g'(x)\frac{x}{g(x)}$$

Preiselastizität des Erlöses

Sei $R(p) = D(p)p$ der Erlös.

Die Elastizität der Erlösfunktion $R(p)$ bezüglich des Preises p ist:

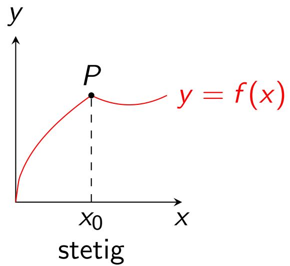
$$El_p R(p) = \frac{dR(p)}{dp} \frac{p}{R(p)} =$$

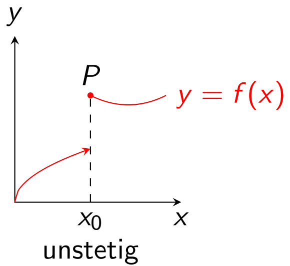
Wann ist die Elastizität des Erlöses gleich null?

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$





Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g, falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0.

(c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0, falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

Stetigkeit: Übung

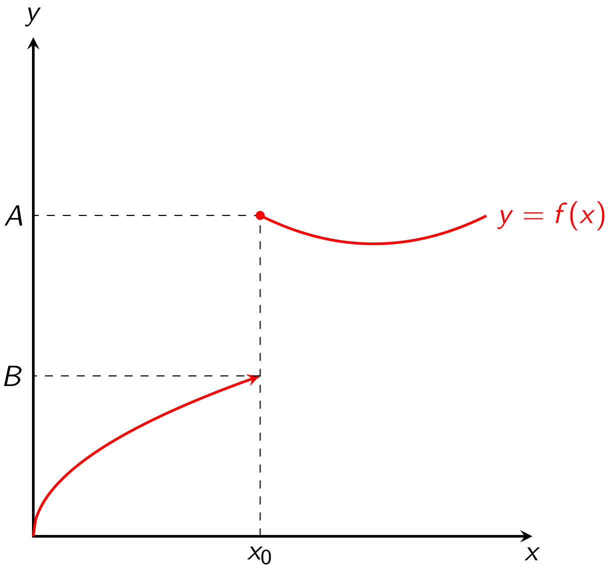
Welche der drei folgenden Funktionen ist/sind stetig?

$$f(x) = x^2 - 1 + 4\sqrt{x} - (1+x)^2,\ x \geq 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 0{,}7 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

7.9 Mehr über Grenzwerte: Fehlender Grenzwert



Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B, wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A, wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} A$$

Einseitige Stetigkeit

Sei f eine Funktion deren Definitionsbereich ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A, wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

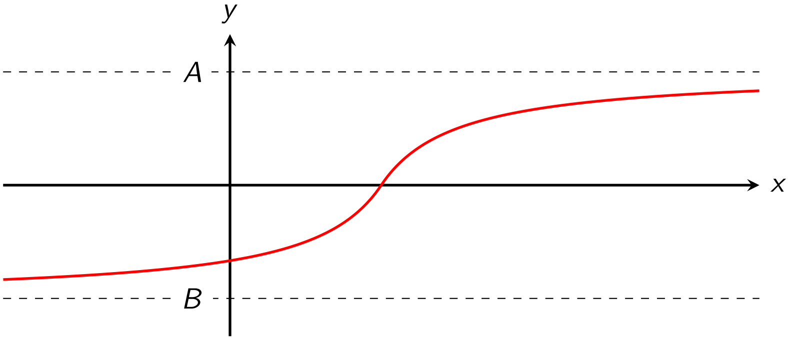
Notation:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Analog:

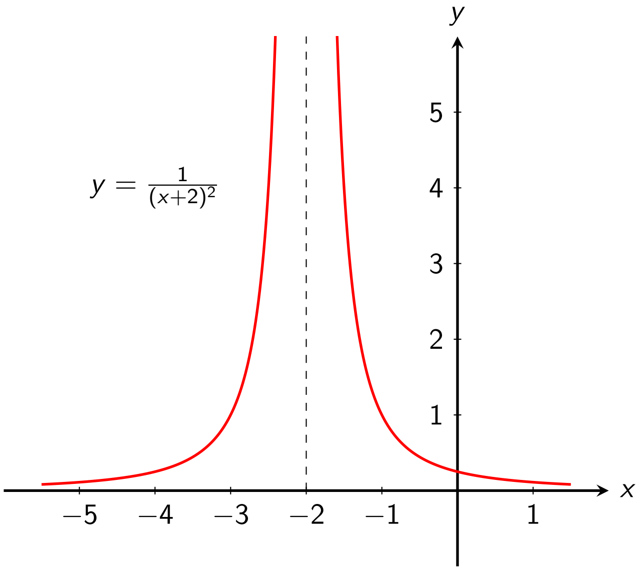
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} B$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \to -\infty} f(x) = B$$

Grenzwert im Unendlichen: vertikale Asymptote



Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Falls die Funktionswerte von f und g mit $x \to x_0$ gegen unendlich streben, schreiben wir $f(x), g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Dann gilt:

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ und } f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ mit } x \to x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \to x_0$.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.

Beispiel:

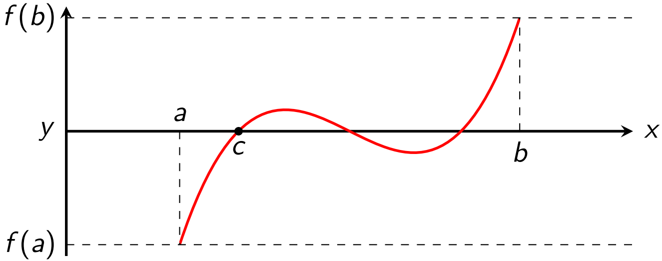
Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien f und g zwei stetige Funktionen mit $g(x_0) = 0$ für ein x_0.

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

Regel von L'Hôpital

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Zusammenfassung

- Implizites Differenzieren
- Ableitung der Inversen
- Approximation
- Elastizitäten
- Stetigkeit
- Zwischenwertsatz
- L'Hôpital