Vorlesung zu Kapitel 03:[1]

Gleichungen Lösen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

3.1 Gleichungen lösen

3.1 Gleichungen lösen

$3 \cdot (-3) + 10 = -9 + 10 = 1$

$-3 + 4 = 1$

Eine Gleichung lösen bedeutet, alle Werte einer Variablen zu finden, für die die Gleichung erfüllt ist.

$$3\underline{x} + 10 = x + 4$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $x = -3$.

Äquivalente Gleichungen

Um äquivalente Gleichungen zu erhalten, sind die folgenden Operationen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens erlaubt:

(A) Addition oder Subtraktion derselben Zahl

(B) Multiplikation mit derselben oder Division durch dieselbe $\underbrace{\text{Zahl}}_{\neq 0}$

$$3x + 10 = x + 4 \quad \Big|\ -10$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + \underbrace{10 - 10}_{=0} = x + \underbrace{4 - 10}_{-6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = x - 6 \quad \Big|\ -x$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{3x - x} = \underbrace{x - 6 - x}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = -6 \quad \Big|\ :2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{-6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -3$$

Beispiel 3.1.3

Löse die Gleichung

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{2}{x} \qquad \Big| \cdot x$$

falls $x \neq 0$, $x \neq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-2} \cdot x - \frac{8}{x^2-2x} \cdot x = \frac{2}{x} \cdot x = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot x + 2x}{x-2} - \frac{8x}{x^2-2x} = 2 \qquad \Big| \cdot (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)} - \frac{8x}{x^2-2x} \cdot (x-2) = 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - \underbrace{\boxed{\frac{8x(x-2)}{x^2-2x}}}_{=8} = 2x - 4$$

$$\frac{8x(x-2)}{x^2-2x} = \frac{(8x^2-16x):x}{(x^2-2x):x} = \frac{8x-16}{x-2} = \frac{8\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 8$$

$$x^2+2x - \boxed{\frac{8x(x-2)}{x^2-2x}}_{=8} = 2x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \underbrace{2x-2x}_{=0} - 8 = \underbrace{2x-4-2x}_{=0} \quad \Big| -2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8 = -4 \quad \Big| +8$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8 + 8 = -4 + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x = 2} \quad \text{oder} \quad \boxed{x = -2}$$

$$a^2 = b^2 \iff a = b \quad \text{oder} \quad a = -b$$

3.2 Gleichungen und ihre Parameter

3.2 Gleichungen und ihre Parameter

Möchte man einen Zusammenhang allgemein durch eine Gleichung darstellen, verwendet man **Parameter**.

Parameter können verschiedene aber „feste" Werte annehmen.

Man erhält Spezialfälle, wenn für die Parameter konkrete Zahlen eingesetzt werden.

Variablen

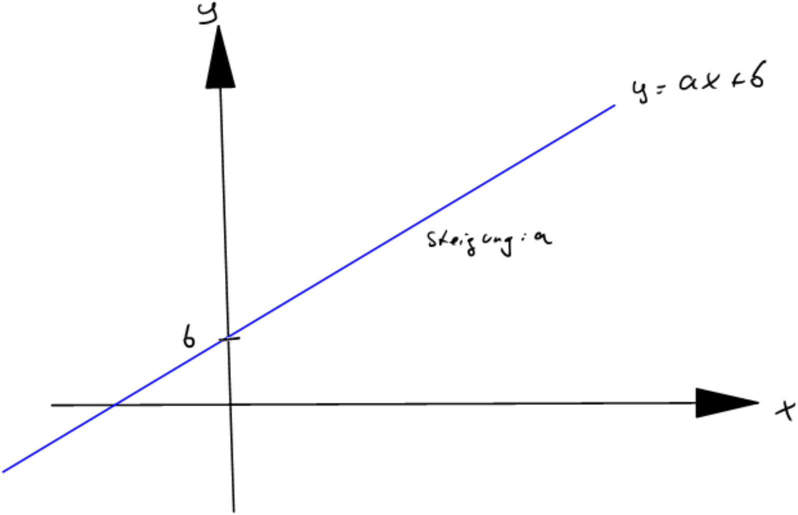
Die Gleichung

$$y = a \cdot x + b$$

Parameter

beschreibt alle linearen Zusammenhänge mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

Versteht man $y = a \cdot x + b$, so kann man schnell auf alle linearen Spezialfälle schließen.



y
y = ax + b
Steigung: a
b
x

Strukturelle & Reduzierte Form

Strukturelle Form: Modell, welches eine ökonomische Interpretation zulässt.

Hier befinden sich Variablen und Parameter gemischt auf beiden Seiten der Gleichungen.

Die Variablen sind „implizit definiert“.

Reduzierte Form: Lösung eines Modells.

Hier befindet sich jeweils eine Variable auf der linken Seite einer Gleichung und alle Parameter finden sich auf den rechten Seiten der Gleichungen.

Die Variablen sind „explizit definiert“.

Falls Lösung eindeutig: keine Variablen auf den rechten Seiten.

Gleichungen und ihre Parameter: Beispiel 3.2.1

Ein makroökonomisches Modell (in struktureller Form):

$$(i)\ Y = C + I \text{ und } (ii)\ C = a + bY$$

Variablen:
Y: Bruttoinlandsprodukt, C: Konsum, I: Investitionen

Parameter:
a, b: mit $a, b > 0$ und $b < 1$.

Gleichung (i):
Definition des BIP als Summe von Konsum und Investitionen

Gleichung (ii):
vereinfachende Annahme $\rightarrow$ Konsum ist linear im BIP

Gesuchte Lösung: Y und C in Abhängigkeit von a, b und I.

$$\text{(i)} \qquad Y = C + I$$

$$\text{(ii)} \qquad C = a + bY$$

$$\Leftrightarrow \qquad Y = C + I$$

$$C = a + \overbrace{b(C + I)}^{b \cdot C + bI} \qquad \Big| -bC$$

$$\Leftrightarrow \qquad Y = C + I$$

$$C(1-b) = C - b \cdot C = a + bI \qquad \Big| :(1-b)$$

$$\Leftrightarrow \qquad Y = C + I$$

$$\boxed{C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = \underbrace{\frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I}_{C} + I$$

$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = \frac{a}{1-b} + \left(\frac{b}{1-b} + 1 \right) \cdot I$$

$$\frac{1-b}{1-b}$$

$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I$$

$$\Leftrightarrow \quad Y = \frac{a}{1-b} + \frac{\cancel{b} + 1 - \cancel{b}}{1-b} \cdot I$$

$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I$$

Gleichungen und ihre Parameter: Beispiel 3.2.1

Lösung (reduzierte Form):

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b} I$$

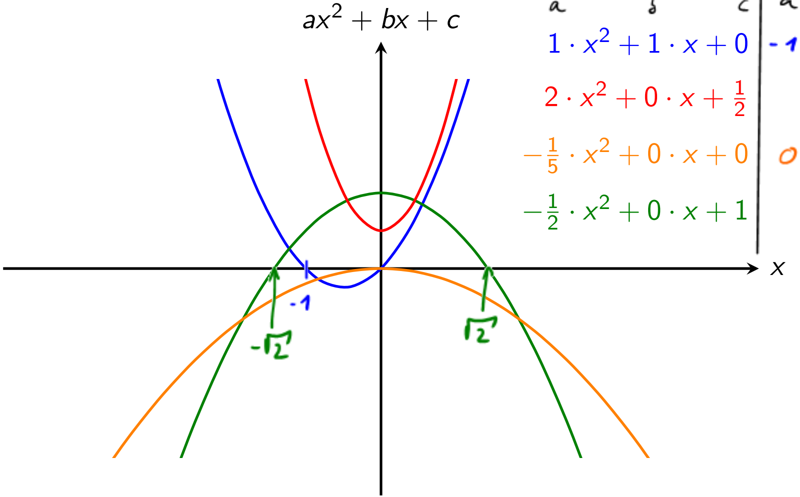
$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} I$$

3.3 Quadratische Gleichungen

3.3 Quadratische Gleichungen: Allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

Graphische Darstellung:



a $\quad$ b $\quad$ c	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{c}{a}$
$1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$	-1	
$2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{5} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$	0	0
$-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$		2

Quadratische Gleichungen: Fall $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

Wir können auf der linken Seite der Gleichung x ausklammern:

$$x(ax + b) = 0$$

Ein Produkt zweier Faktoren ist gleich null, falls mindestens einer der beiden Faktoren gleich null ist:

$$x = 0 \text{ oder } ax + b = 0 \overset{-b}{\Leftrightarrow} ax = -b \overset{:a}{\Leftrightarrow} x = -\frac{b}{a}$$

Diese beiden Gleichung bestimmen die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx = 0$:

Lösungen:

$$x = 0 \text{ oder } x = -\frac{b}{a}$$

Quadratische Gleichungen: Fall $b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 = -\frac{c}{a}}$$

Um die Lösung zu bestimmen, müssen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel ziehen.

Vorsicht! Wir können die Quadratwurzel nicht von negativen Ausdrücken bestimmen.

- <u>Fall $-\frac{c}{a} < 0$:</u> keine Lösung (in den rellen Zahlen)!
- <u>Fall $-\frac{c}{a} = 0$:</u> eine Lösung ($x = 0$)
- <u>Fall $-\frac{c}{a} > 0$:</u> zwei Lösungen ($x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \lor x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$)

oder

Bestimme nun die Lösungen für die Gleichungen auf Folie ~~11~~ 12.

- $x^2 + x = 0$

Siehe Folie 12

- $2x^2 + \frac{1}{2} = 0$
- $-\frac{1}{5}x^2 = 0$
- $-\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$

Die Lösungen entsprechen den x-Achsenabschnitten der Graphen.

Beispiel: Allgemeiner Fall

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$-5 = -1 \cdot 5$

$-5 = 1 \cdot (-5)$

Bestimme die Lösung für die Gleichung

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overset{a^2}{x^2} + \overset{2ab}{2x \cdot 2} + \overset{b^2}{2^2}} \underbrace{-5 - 2^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \underbrace{\sqrt{9}}_{=3} \quad \text{oder} \quad x+2 = -\underbrace{\sqrt{9}}_{=3} \quad | -2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -5}$$

Quadratische Gleichungen: p-q-Formel

Umformung der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

zu

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{=:p} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:q} = 0$$

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

p-q-Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q$ gilt

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für $x^2 + \overset{p}{4}x \overbrace{-5}^{q} = 0$

$$x = -2 \pm \sqrt{4-(-5)} = -2 \pm \sqrt{9}$$

$x = -2 - 3$ oder $x = -2 + 3$

$= -5$ $\qquad$ $= 1$

Von Folie 19:

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$$

$$= x^2 - x + 5x - 5 = x^2 + 4x - 5 \checkmark$$

Satz von Vieta

$x^2 + \overset{p}{4}x \overset{q}{-5} = 0$

$x_1 + x_2 = -4$

$x_1 \cdot x_2 = -5$

Die Zahlen x_1, x_2 sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

Pause bis 11 Uhr

genau dann wenn

$$x_1 + x_2 = -p$$

und

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Faktorzerlegung einer quadratischen Form

Wenn x_1 und x_2 Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, gibt es keine Faktorzerlegung von $x^2 + px + q$.

Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, dann gilt $x_1 = x_2$ und $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$.

Beispiel Faktorzerlegung

Zerlege die quadratische Funktion in Faktoren (falls möglich):

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5 = 0 \qquad \mid \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \overset{p}{2}x \underbrace{-15}^{q} = 0$$

Satz von Vieta

$$x_1 + x_2 = -p = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = -15 = -3 \cdot 5 = 3 \cdot (-5)$$

Möglichkeit 1: $x_1 = -3, \; x_2 = 5$

1. Gleichung $-3 + 5 = 2 \neq -2$

Möglichkeit 2: $\boxed{x_1 = 3, \; x_2 = -5}$

1. Gleichung $3 + (-5) = -2$ ✓

$$x^2 \overbrace{+2x}^{p} \overbrace{-15}^{q} = 0$$

p-q-Formel

$$x = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -1-4 \quad , \quad x_2 = -1+4$$

$$= -5 \qquad\qquad = 3$$

Faktorzerlegung

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5 = \frac{1}{3}(x^2+2x-15) = \frac{1}{3}(x+5)(x-3)$$

3.4 Einige Nichtlineare Gleichungen

3.4 Nichtlineare Gleichungen

In den Wirtschaftswissenschaften sind nichtlineare Gleichungen allgegenwärtig.

Es steht aber leider keine allgemeine Methode zur Lösung all dieser Gleichungen zur Verfügung.

Oft hilft uns aber folgender Zusammenhang für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

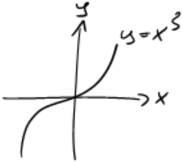
$$ab = ac \Leftrightarrow a = 0 \vee b = c$$

$ab = ac$ ist äquivalent zu $ab - ac = 0$ bzw. zu $a(b - c) = 0$.

Wenn ein Produkt gleich null ist, so muss mindestens einer seiner Faktoren gleich null sein.

Wenn $a(b - c) = 0$, dann gilt also $a = 0$ oder $b = c$.

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)



$$x^3\sqrt{x+2} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^3 = 0$ oder $\sqrt{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = -2$

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)

$$x(y+3)\overbrace{(z^2+1)}^{\geq 1}\sqrt{w-3} = 0$$

$\iff$ $x=0$ oder $y=-3$ oder $w=3$

Nichtlineare Gleichungen (Beispiel 3.4.1)

$$x^2 - 3x^3 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad$ oder $\quad 1 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ oder $\quad x = \frac{1}{3}$

Beispiel 3.4.3 für Brüche

a) $\frac{1-K^2}{\sqrt{1+K^2}} = 0$

b) $\frac{45+6r-3r^2}{(r^4+2)^{3/2}} = 0$

c) $\frac{x^2-5x}{\sqrt{x^2-25}} = 0$

Beispiel 3.5.1: $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2(\frac{1}{2} - 4x)$

Beispiel 3.5.2: $x + 2 = \sqrt{4 - x}$

3.6 Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

Einsetzungsverfahren

Beispiel 3.6.1

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 18 \\
3x - 4y &= -7
\end{aligned}
$$

1. Löse eine Gleichung nach x oder y auf.
2. Ersetze x bzw. y in der anderen Gleichung.
   → Eine Gleichung mit einer Variablen
3. Löse diese Gleichung nach dieser Variablen.
4. Setze die Lösung in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und löse diese.

Schritt 1: $2x + 3y = 18 \quad | -3y$

$\Leftrightarrow 2x = 18 - 3y \quad | :2$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 9 - \frac{3}{2}y}$

Schritt 2

Schritt 3

$3 \cdot \left(9 - \frac{3}{2}y\right) - 4y = -7$

$\Leftrightarrow 27 - \frac{9}{2}y - 4y = -7 \quad | -27$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}y - 4y = -7 - 27 = -34$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{9}{2} - 4\right)y = -34$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{9}{2} - \frac{8}{2}\right)y = -34$

$\Leftrightarrow -\frac{17}{2}y = -34 \quad | \cdot \left(-\frac{2}{17}\right)$

$\Leftrightarrow y = -34 \cdot \left(-\frac{2}{17}\right) = 2 \cdot 2 = 4$

Schritt 4

4. $x = 9 - \frac{3}{2} \cdot 4 = 9 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$

$x = 3$
$y = 4$

Additionsverfahren

Beispiel 3.6.1

$$8x + 12y = 72$$
$$9x - 12y = -21$$
$+$ Schritt 2

Schritt 1

$$17x + 0y = 51 \quad |:17$$

Schritt 3:

$$x = \frac{51}{17} = 3$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 & |\cdot 4 \\ 3x - 4y &= -7 & |\cdot 3 \end{aligned}$$

Schritt 4:

$$3 \cdot 3 - 4y = -7 \quad |-9$$
$$-4y = -7 - 9 = -16 \quad |:(-4)$$
$$y = \frac{-16}{-4} = 4$$

1. Multipliziere beide Gleichungen mit geeigneten Zahlen, so dass der Koeffizient von x oder y in der einen Gleichung die Gegenzahl des Koeffizienten von x bzw. y in der anderen Gleichung ist.
2. Addiere beide Gleichungen, um diese Variable zu eliminieren.
   $\rightarrow$ Eine Gleichung mit einer Variablen
3. Löse diese Gleichung nach dieser Variablen.
4. Setze die Lösung in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und löse diese.

Gleichsetzungsverfahren

Schritt 2: $9 - \frac{3}{2}y = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}y$

Beispiel 3.6.1

$3x - 4y = -7 \quad |+4y$

$3x = -7 + 4y \quad |:3$

$x = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}y$

Schritt 1

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \iff x = 9 - \frac{3}{2}y \\ 3x - 4y &= -7 \iff x = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}y \end{aligned}$$

= Schritt 2

1. Löse beide Gleichungen nach einer der beiden Variablen.
2. Setze die Lösungen der beiden Gleichungen gleich.
   $\rightarrow$ Eine Gleichung mit einer Variablen
3. Löse diese Gleichung nach dieser Variablen.
4. Setze die Lösung in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und löse diese.

Geometrische Interpretation der Gleichungen

Jede der linearen Gleichungen repräsentiert eine Gerade.

Das Gleichsetzungsverfahren macht die Achsenabschnitte und die Steigungen dieser Geraden sichtbar:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 3x - 4y &= -7 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= 6 - \tfrac{2}{3}x \\ y &= \tfrac{7}{4} + \tfrac{3}{4}x \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Zwei Geradengleichungen mit den Steigungen $-\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$.

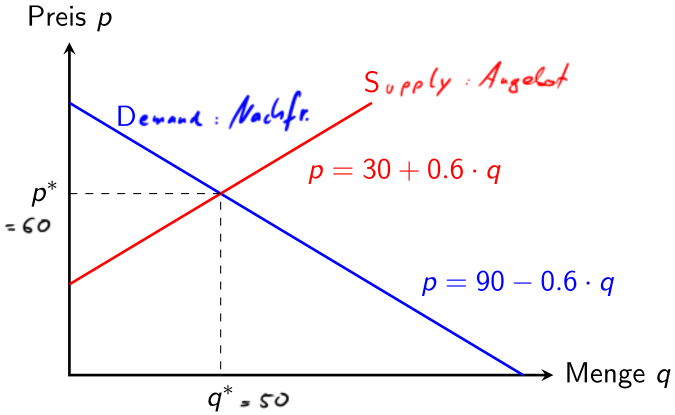
$\rightarrow$ Lösungen $=$ Schnittpunkte dieser Geraden.

Lösungen: Drei Fälle

Mit der geometrischen Interpretation lassen sich leicht drei Fälle unterscheiden:

- **eindeutige Lösung**
  Sind die Steigungen der beiden Geraden verschieden, gibt es genau einen Schnittpunkt und das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- **keine Lösung**
  Sind die Steigungen der beiden Geraden gleich und die Achsenabschnitte verschieden, gibt es keinen Schnittpunkt und das Gleichungssystem hat keine Lösung.
- **unendlich viele Lösungen**
  Sind die Steigungen und die Achsenabschnitte der beiden Geraden gleich, sind die Geraden identisch und das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Beispiel: Angebot und Nachfrage



Wie lauten p^* und q^*?

$$p = 30 + 0.6q$$
$$p = 90 - 0.6q$$

Additionsverfahren

$$p + p = 30 + 90 \underbrace{+ 0.6q - 0.6q}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p = 120 \quad \Leftrightarrow \quad p^* = 60$$

Einsetzen in 1. Gleichung:

$$60 = 30 + 0.6q$$

$$30 = 0.6q \qquad \Big| : 0.6 = : \frac{6}{10} = \cdot \frac{10}{6}$$

$$30 \cdot \frac{10}{6} = 0.6 \cdot \frac{10}{6} \cdot q$$

$$50 = q^*$$

Gleichsetzungsverfahren

$$30 + 0.6q = 90 - 0.6q$$

$$0.6q + 0.6q = 90 - 30$$

$$1.2q = 60$$

$$\frac{12}{10} q = 60 \qquad \Big| \cdot \frac{10}{12}$$

$$q = 60 \cdot \frac{10}{12} = 50 \checkmark$$

$$\Rightarrow p = 30 + 0.6 \cdot 50$$
$$= 30 + 6 \cdot 5$$
$$= 30 + 30$$
$$= 60 \checkmark$$

Komparative Statik

Wir interessieren uns in den Wirtschaftswissenschaften oft dafür, wie das Gleichgewicht auf Veränderungen der Rahmenbedingungen reagiert. Diese Analyse bezeichnen wir als **komparative Statik**.

Die Rahmenbedingungen fließen über die Parameter in das Gleichungssystem ein.

Beispiel: Mengensteuer

Die Mengensteuer t beeinflusst den Achsenabschnitt der inversen Nachfragefunktion.

$$p = 90 - t - 0.6 \cdot q$$

Wie hängt das Gleichgewicht (q^*, p^*) vom Steuersatz t ab?

Zusammenfassung

- Äquivalente Umformungen
- Gleichungen und ihre Parameter
- Quadratische Gleichungen
- Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten