

Wesentliches aus der Logik und Algebra



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

1.2 Wesentliches aus der Logik

2.1 Zahlenbereiche

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

2.3 Regeln der Algebra

2.4 Brüche

2.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

2.6 Ungleichungen

2.7 Intervalle und Absolutbeträge

1.2 Wesentliches aus der Logik: Aussage, offene Aussage

Aussage: Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele:

- ▶ Jedes Tier ist eine Katze.
- ▶ Falls $x > 3$, dann gilt auch $x > 2$.
- ▶ Jedes Rechteck ist ein Quadrat.

Offene Aussage: Aussage, die von einer Variablen abhängt.

- ▶ Jedes Rechteck mit den Kantenlängen a und b ist ein Quadrat.
- ▶ Zum Preis p herrscht Markträumung.

Implikationen

Seien P und Q zwei verschiedene Aussagen.

Falls gilt „Wenn P wahr ist, dann ist notwendig auch Q wahr“, dann schreiben wir

$$P \Rightarrow Q .$$

Das Symbol $\Rightarrow$ ist ein **Implikations-Pfeil**.

Falls zusätzlich

$$P \Leftarrow Q$$

gilt, schreiben wir

$$P \Leftrightarrow Q .$$

Das Symbol $\Leftrightarrow$ ist ein **Äquivalenz-Pfeil**.

Beispiele für korrekte Implikationen

a) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

b) $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$

c) $S \text{ ist ein Quadrat.} \Rightarrow S \text{ ist ein Rechteck.}$

d) $\text{Sie lebt in Paris.} \Rightarrow \text{Sie lebt in Frankreich.}$

Beispiele für korrekte Äquivalenzen

a) $(x < -2 \text{ oder } x > 2) \Leftrightarrow x^2 > 4$

b) $xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$

Kontraposition

Die Aussage $P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu der Aussage

$$\text{Nicht } Q \Rightarrow \text{Nicht } P$$

Beispiel:

- ▶ P : Es regnet.
- ▶ Q : Das Gras wird nass.

Kontraposition von $P \Rightarrow Q$:

„Wenn das Gras nicht nass wird, dann regnet es nicht.“

Beispiel Kontraposition

Nutze das Prinzip der Kontraposition, um zu zeigen:

Wenn x und y ganze Zahlen sind und xy eine ungerade Zahl ist, dann sind x und y beide ungerade.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Wenn die Aussage P die Aussage Q impliziert, wenn also $P \Rightarrow Q$, dann ist

- ▶ P eine **hinreichende Bedingung** für Q
und
- ▶ Q ist eine **notwendige Bedingung** für P .

Drei Aussagen: Welche ist falsch?

1. Leben in Frankreich ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Paris zu leben.
2. Leben in Paris ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.
3. Leben in Paris ist eine hinreichende Bedingung für eine Person, um in Frankreich zu leben.

Drei Aussagen: Welche ist richtig?

1. $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$

2. $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$

3. $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit

Aussage: „**Wenn die Inflation steigt, fällt die Arbeitslosigkeit.**“

Welche der folgenden Aussagen sind hierzu äquivalent?

- a) Damit die Arbeitslosigkeit fällt, muss die Inflation steigen.
- b) Eine hinreichende Bedingung für das Fallen der Arbeitslosigkeit ist, dass die Inflation steigt.
- c) Arbeitslosigkeit kann nur fallen, wenn die Inflation steigt.
- d) Wenn die Arbeitslosigkeit nicht fällt, steigt die Inflation nicht.
- e) Eine notwendige Bedingung für das Steigen der Inflation ist das Fallen der Arbeitslosigkeit.

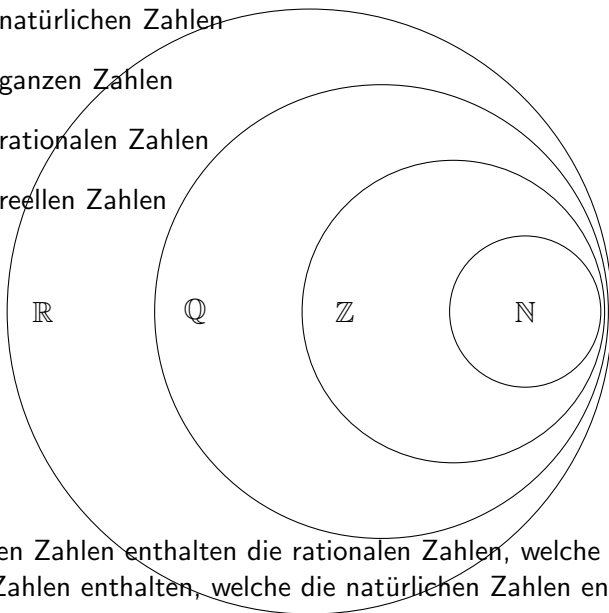
2.1 Zahlenbereiche:

$\mathbb{N}$: die natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z}$: die ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: die rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: die reellen Zahlen



Die reellen Zahlen enthalten die rationalen Zahlen, welche die ganzen Zahlen enthalten, welche die natürlichen Zahlen enthalten.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

WiWi: unteilbare Mengen, Indizes, ...

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

WiWi: Differenzen, ...

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

WiWi: Verhältnisse, Raten, ...

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ = rationale und irrationale Zahlen

irrationale Zahlen: z.B. $\sqrt{2}$, π , ...

WiWi: Optimierung (Differentialrechnung)

2.3 Regeln der Algebra

Für Zahlen a, b, c gelten folgende Rechenregeln:

- ▶ Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- ▶ Assoziativgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- ▶ Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2.4 Brüche

Seien m, n Zahlen, wobei $n \neq 0$.

Wir nennen $\frac{m}{n}$ einen **Bruch**.

Die Zahl m heißt **Zähler** und die Zahl n heißt **Nenner**.

Der Bruch $\frac{m}{n}$ ist das Ergebnis der Division $m : n$.

Wenn m und n ganze Zahlen sind, dann ist $\frac{m}{n}$ eine rationale Zahl.

Kehrwert

Zu einem Bruch $\frac{m}{n}$ ist die Zahl $\frac{n}{m}$ der **Kehrwert** (falls $m \neq 0$).

Beispiele:

$\frac{3}{4}$ ist der Kehrwert von $\frac{4}{3}$ und

$\frac{6}{7}$ ist der von $\frac{7}{6}$.

Erweitern von Brüchen

Beim Erweitern von Brüchen werden der Zähler und der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Erweitern ändert den Wert eines Bruches nicht. Sei eine Zahl $k \neq 0$. Dann gilt:

$$\blacktriangleright \frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$$

Beide Brüche stellen dieselbe Zahl dar.

Beispiele (erweitere mit 6 bzw. -2!)

$$\blacktriangleright \frac{1}{2} =$$

$$\blacktriangleright \frac{3}{4} =$$

Kürzen von Brüchen

Kürzen ist die umgekehrte Operation zum Erweitern. Dabei werden der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl dividiert. Auch Kürzen ändert den Wert eines Bruches nicht.

Sei ein Zahl $k \neq 0$. Dann gilt:

$$\blacktriangleright \frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$$

Ist k ein Teiler von m und n , sind also die Brüche $\frac{m}{k}$ und $\frac{n}{k}$ ganze Zahlen, so wird der Bruch kürzer.

Beispiele:

$$\blacktriangleright \frac{30}{40} =$$

$$\blacktriangleright \frac{12}{44} =$$

Addition und Subtraktion von Brüchen gleichen Nenners

Haben zwei Brüche den gleichen Nenner, so können einfach die Zähler addiert oder subtrahiert werden:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m + p}{n}$$

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m - p}{n}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen unterschiedlichen Nenners

Um die Summe oder die Differenz zweier Brüche mit unterschiedlichen Nennern zu berechnen, müssen diese zunächst durch Erweitern mit dem jeweils anderen Nenner auf den gleichen Nenner gebracht werden:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} + \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$$
$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} - \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q}$$

Hinweis:

Der Hauptnenner zweier Bruchzahldarstellungen ist der kleinstmögliche gemeinsame Nenner, auf welchen beide Brüche erweitert werden können.

Multiplikation und Division mit Zahlen

Für die Multiplikation eines Bruchs $\frac{p}{q}$ mit einer Zahl n gilt:

$$\frac{p}{q} \cdot n = \frac{p \cdot n}{q}$$

Für die Division eines Bruchs $\frac{p}{q}$ durch eine Zahl $n \neq 0$ gilt:

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{n \cdot q}$$

Betrachte den Spezialfall $n = -1$!

Multiplikation mit Brüchen

Für die Multiplikation der beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ gilt:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Es werden also Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert.

Beispiele:

► $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$

► $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{11} =$

Division mit Brüchen

Die Division eines Bruches durch einen Bruch entspricht der Multiplikation mit dem Kehrwert des Bruches:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Beispiel:

► $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} =$

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Sei a eine reelle und n eine natürliche Zahl. Dann ist a^n definiert durch:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Wir nennen a^n eine **Potenz**. Dabei heißt a **Basis** und n ist der **Exponent** (der Potenz).

Insbesondere gilt $a^1 = a$ und wir setzen $a^0 := 1$.

Hinweis: Für $a \neq 0$:

► $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Insbesondere gilt $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Potenzgesetze

Für alle Zahlen a, b, m und n mit $a, b \neq 0$ gelten folgende Rechenregeln:

▶ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

▶ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

▶ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

▶ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

▶ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

2.5 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

In wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen begegnen wir Ausdrücken, wie

$$K^{\frac{1}{4}} \text{ oder } p^{-1,5}$$

Wie definieren wir die Potenz a^x , wenn die Basis a eine reelle Zahl ist und der Exponent x eine rationale Zahl?

Quadratwurzel

Sei $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \geq 0$, deren Quadrat a ist, mit der **Quadratwurzel** aus a und schreiben $\sqrt{a}$:

$$b = \sqrt{a} \implies b^2 = a$$

Der Term unter dem Wurzelzeichen wird auch **Radikand** genannt. Für bspw. $\sqrt{a}$ bezeichnen wir a als den Radikanden.

n -te Wurzel

Sei n eine natürliche und a eine reelle Zahl mit $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl $b \geq 0$, deren n -te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

$$\blacktriangleright b = \sqrt[n]{a} \implies b^n = a$$

Sprechweise: n -te Wurzel aus a .

Beispiel:

$$\blacktriangleright \sqrt[3]{8} =$$

Rechenregeln für Wurzeln

Folgende Rechenregeln gelten für Wurzeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Beispiele:

► $\sqrt[3]{27 \cdot 125} =$

► $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$

Achtung:

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Potenzen und Wurzeln

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\blacktriangleright a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

$$\blacktriangleright a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$$

Wir stellen verallgemeinernd fest:

$$\blacktriangleright a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

bzw.

$$\blacktriangleright a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.6 Ungleichungen

Falls die Differenz $a - b$ positiv ist, ist a größer als b : $a > b$.

Falls die Differenz $a - b$ null ist, ist a gleich b : $a = b$.

Falls die Differenz $a - b$ negativ, ist a kleiner als b : $a < b$.

Wenn $a > b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir: $a \geq b$.

Wenn $a < b$ oder $a = b$ gilt, schreiben wir: $a \leq b$.

Wir nennen $>$ bzw. $<$ strikte Ungleichungen und $\geq$ bzw. $\leq$ schwache Ungleichungen.

Falls der Unterschied wichtig ist, betonen wir ihn und fügen das Wort „strikt“ bzw. „schwach“ hinzu.

Eigenschaften von Ungleichungen

- ▶ Wenn $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$
- ▶ Wenn $a > b$ und $c > 0$, dann ist $ac > bc$

Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer positiven Zahl multipliziert werden, bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten.

- ▶ Wenn $a > b$ und $c < 0$, dann ist $ac < bc$

Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert werden, kehrt sich die Richtung der Ungleichung um.

- ▶ Wenn $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$

Alle vier Eigenschaften bleiben erhalten, wenn alle strikten Ungleichungen durch schwache Ungleichungen ersetzt werden.

2.7 Intervalle

Seien a und b zwei Zahlen mit $a < b$.

Beschränktes Intervall:

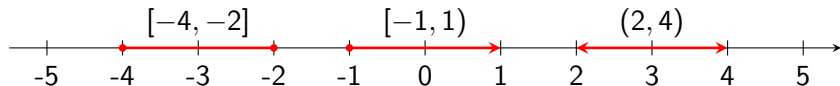
Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b .

Die Zahlen a und b heißen **Rand** des Intervalls.

Notation	Bezeichnung	Das Intervall besteht aus allen x mit
(a, b)	<i>offen</i>	$a < x < b$
$[a, b]$	<i>abgeschlossen</i>	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	<i>halboffen</i>	$a < x \leq b$
$[a, b)$	<i>halboffen</i>	$a \leq x < b$

Je nachdem, ob der Rand im Intervall enthalten ist (oder nicht), heißt das Intervall abgeschlossen, offen oder halboffen.

Grafische Darstellung von Intervallen



Innere Punkte: alle Punkte, die nicht auf dem Rand liegen.

Intervalle, die in mindestens eine Richtung keinen Rand haben, heißen **unbeschränkte Intervalle:**

$$[a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, \infty)$$

2.7 Absolutbetrag

Absolutbetrag der Zahl a : Abstand zwischen a und 0.

Der Absolutbetrag der Zahl a ist definiert durch

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der **Abstand** zwischen zwei Zahlen a und b ist

$$|a - b| = \max\{a - b, b - a\} = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ b - a & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Zusammenfassung

- ▶ Implikationen und Äquivalenzen
- ▶ Zahlenbereiche
- ▶ Potenzen und deren Rechenregeln
- ▶ Regeln der Algebra
- ▶ Brüche
- ▶ Ungleichungen
- ▶ Intervalle und Absolutbeträge