Tutorium 17.07. Notizen

Aufgabe 4 2023 I

a)

Ein AR(1) Prozess ist ein stochastischer Prozess bei dem der heutige Wert von dem vergangen abhängig ist:

$$u_t = \alpha_0 + \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

Typischerweise ist dieser Prozess in Zeitreihen zu finden.

b)

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

Testen dieser Hypothesen erfolgt durch den t-Test:

$$t = \frac{\hat{\rho}}{se(\hat{\rho})} = \frac{0.292}{0.118} \approx 2.475$$

Unter jährlicher Erhebung gilt $n = 68$ ist unter der zweiseitigen Hypothese der p-Wert ungefähr 1.5%.
Es liegt also Evidenz für einen AR(1) Prozess vor.

c)

Bei der Quasidifferenzierung handelt es sich um eine verzerrte Differenzierung, welche die Autokorrelation aus den Störtermen "rausfiltert".
Die transformierten Werte ($\tilde{\cdot}$) sind quasidifferenziert.

d)

Wie aus der b) wenden wir erneut den t-Test an. Dieses Mal mit den Werten aus `uhat3`:

$$t = \frac{0.014}{0.124} = 11.3\%$$

Dieser t-Quotient ist sehr klein, daher kann die H_0 Hypothese nicht verworfen werden.

Aufgabe 4 2024 I

a)

Test: Breusch-Pagan

Funktionsweise: Testen ob der Regressor hilft, das quadrierte Residuum vorherzusagen. Wenn Ja, besteht ein Zusammenhang.

b)

$$H_0 : Var(\epsilon_i) = \sigma^2$$

Testentscheidung:

- Da der Parameter von dem Regressor x sehr signifikant ist, kann man von einer Ablehnung von H_0 ausgehen.

Auswirkung auf Modell 1:

- Verzerrte Standardfehler
- OLS ist nicht mehr effizient (LUE statt BLUE)
- p-Werte (der t-Quotienten) verlieren an Bedeutung

c)
Annahme: Multiplikative Heteroskedastizität

Beziehung:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{u}_i^2) &= \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \\ \hat{u}_i^2 &= \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + e_i) \\ \hat{u}_i^2 &= e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x_i} \cdot e^{e_i} \end{aligned}$$

d)
Schätzer:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \exp(\widehat{\ln(\hat{u}_i^2)})$$

Anwenden der FGLS Transformation:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= \frac{y_i}{\hat{\sigma}_i} \\ \tilde{x}_i &= \frac{x_i}{\hat{\sigma}_i} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 2024 II

a)
Bei der Spalte handelt sich um die Ergebnisse des t-Tests mit der Hypothese $H_0 : \beta_i = 0$. Die Formel lautet:

$$t_i = \frac{\hat{\beta}_i}{se(\hat{\beta}_i)}$$

b)

Der Parameter von `educ` ist hoch signifikant, ein Jahr zusätzliche Bildung erhöht laut Modell den Stundensatz um 64 cent (Kaufkraft aus 1976).

c)

Die gesuchte Größe ist das R^2 und es werden 22% der Streuung erklärt.

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

d)

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Der gesuchte Wert lässt sich aus der Standardabweichung von der abhängigen Variable berechnen und lautet:

$$(526 - 2) \cdot 3.7^2 = 7173.56$$

Der andere weg über SSR und R^2 wäre:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{SSR}{SST} \\ \frac{SSR}{SST} &= 1 - R^2 \\ \frac{SSR}{1 - R^2} &= SST \end{aligned}$$

Aufgabe 3 2024 II

a)

$$Var(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2)$$

In Matrixform würden wir aber schreiben:

$$Var(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))(Z - \mathbb{E}(Z))')$$

Die Kovarianz ist gegeben als:

$$Cov(Z, Y) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

b)

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= Var(\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2) \\ &= Var(\hat{\beta}_1) + Var(2\hat{\beta}_2) + 2Cov(\hat{\beta}_1, 2\hat{\beta}_2) \\ &= \sigma_1^2 + 4Var(\hat{\beta}_2) + 4Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ &= \sigma_1^2 + 4\sigma_2^2 + 4\sigma_{12}^2 \end{aligned}$$

Für den Standardfehler müssen wir die Wurzel nehmen:

$$se(\hat{\theta}) = \sqrt{\sigma_1 + 4\sigma_2 + 4\sigma_{12}^2}$$

c)

$$t = \frac{\hat{\theta} - 2}{se(\hat{\theta})} = \frac{\hat{\theta} - 2}{\sqrt{\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2 + 4\sigma_{12}^2}}$$

d)

Wir bekommen die gewünschte Form durch das Ergänzen von $2\beta_2 x_1 - 2\beta_2 x_1$

$$\begin{aligned}
y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \\
y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + 2\beta_2 x_1 - 2\beta_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \\
&= \beta_0 + (\beta_1 + 2\beta_2) x_1 + (x_2 - 2x_1)\beta_2 + \beta_3 x_3 + u \\
&= \beta_0 + \theta x_1 + \beta_2 z + \beta_3 x_3 + u
\end{aligned}$$