Klausuraufgaben

Aufgabe 2 2022 I

t-Test: 1. (Zweiseitige Hypothese $\beta_2 = 5$)
Chow-Test: 5. (Test auf Strukturbruch zwischen den Stichproben mit $d_i = 1$ und $d_i = 0$)
F-Test: 3. ($R = [0_k I_k], r = 0_k$, Wobei 0_k ein Vektor von Nullen ist mit länge k und I_k die Einheitsmatrix)
Breusch-Pagan-Test: 4.
White-Test: 4. (Wie Breusch-Pagan aber mit mehr Information)
Breusch-Godfrey-Test: 2. (seriell unkorreliert)
Durbin-Watson-Test: 2.

Breusch-Godfrey

1. Wir fitten die Hilfsregression:

$$\hat{u}_t = \beta_0 \hat{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jt} + e_t$$

2. Die Teststatistik ergibt sich dann aus dem Bestimmtheitsmaß unserer Hilfsregression:

$$BG = (n-1)R^2 \to X_1^2$$

Durbin Watson

Wir testen die Hypothese

$$H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho > 0$$

Aus dem Modell:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

Die Teststatistik ergibt sich aus den OLS-Residuen:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

Die Entscheidung von DW hängt von $[d_L, d_U]$ ab und **es kann keine Entscheidung getroffen werden, wenn** $DW \in [d_L, d_U]$

Aufgabe 5 Klausur 2022 II

a)
Die formale Definition von Heteroskedastizität ist:

$$Var(u_i) = \sigma_i \quad Cov(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Folgende MLR Bedingungen fordern Homoskedastizität:

1. MLR 5 (Sphärische Störterme)
2. MLR 6 (Normalitätsannahme) $u \sim \mathcal{N}(0_n, \sigma^2 I_n)$

b)
Eigenschaft:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_{OLS}|X) = \beta$$

- Die Schätzung ist unverzerrt

Methode:

- T-Test ist nicht mehr gültig, da die Schätzung von $se(\hat{\beta}_{OLS})$ nicht mehr gültig ist.

c)

1. Breusch-Pagan Test anwenden
2. Wenn der Wert über dem kritischen Wert zu meinem Signifikanzniveau liegt, dann verwerfe die H_0 (homoskedastische Störterme)

Aufgabe 5 Klausur 2024 I

Schauen wir uns erstmal u_1, u_2 usw. an

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}u_0 + \epsilon_1 = \epsilon_1 \\
u_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \epsilon_2 \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_1) + \epsilon_2 \\
u_3 &= \frac{1}{2}u_2 + \epsilon_3 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2\right) + \epsilon_3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 + \epsilon_3
\end{aligned}
$$

Allgemein muss also gelten:

$$
u_t = \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \epsilon_{t-i}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(u_t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \epsilon_{t-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} 0 = 0
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
Var(u_t) &= Var\left(\sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \epsilon_{t-i}\right) \\
&\underset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{i=0}^{t-1} Var\left(\left(\frac{1}{2}\right)^i \epsilon_{t-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} Var(\epsilon_{t-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

d)

$$\begin{aligned}Cov(u_t, u_{t-1}) &= Cov(\rho u_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-1}) \\ &= \rho Cov(u_{t-1}, u_{t-1}) + Cov(\epsilon_t, u_{t-1}) \\ &= \rho Var(u_{t-1}) \\ &= \rho \sum_{i=0}^{t-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{t-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}\end{aligned}$$

Für u_{t-2}

$$\begin{aligned}Cov(u_t, u_{t-2}) &= Cov\left(\frac{1}{2}u_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-2}\right) \\ &= \frac{1}{2}Cov(u_{t-1}, u_{t-2}) + Cov(\epsilon_t, u_{t-2}) \\ &= \frac{1}{2}Cov(u_{t-1}, u_{t-2}) \\ &= \frac{1}{2}Cov\left(\frac{1}{2}u_{t-2} + \epsilon_{t-1}, u_{t-2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(u_{t-2}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{i=0}^{t-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}\end{aligned}$$

Für u_{t-3} unter Nutzung des bestehenden Musters:

$$\begin{aligned}Cov(u_t, u_{t-3}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 Var(u_{t-3}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{i=0}^{t-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}\end{aligned}$$

Und generell gilt:

$$Cov(u_t, u_s) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-s} \sum_{i=0}^{t-s} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$$