

Kapitel 12:

Serielle Korrelation in Zeitreihen



Moodle



Lehrbuch

Das klären wir in diesem Kapitel:

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

Autoregressive Prozesse erster Ordnung

FGLS bei Autokorrelation

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

Eigenschaften von OLS mit seriell korrelierten Fehlern

- ▶ OLS ist unverzerrt und konsistent.
- ▶ Das Bestimmtheitsmaß R^2 ist valide.
- ▶ OLS Standardfehler und darauf basierende Tests sind nicht valide.
- ▶ OLS ist nicht effizient.

Autoregressive Prozesse erster Ordnung

AR(1) serielle Korrelation

AR(1): Autoregressiver Prozess 1. Ordnung

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, t = 1, \dots, n$$

wobei:

- ▶ u_0 ein passender Startwert
- ▶ $\rho \in \mathbb{R}$: unbekannter und fester Parameter
- ▶ ϵ_t iid Zufallsvariable mit $E[\epsilon_t|X] = 0$ und $Var(\epsilon_t|X) = \sigma_\epsilon^2$

Die Kovarianz zweier Störterme bei AR(1)

Es gilt

$$\text{Cov}(u_t, u_{t-1}) = \text{Cov}(\rho u_{t-1} + \epsilon_t, u_{t-1}) = \rho \text{Var}(u_{t-1}) + \underbrace{\text{Cov}(\epsilon_t, u_{t-1})}_{=0}$$

und entsprechend:

$$\text{Cov}(u_t, u_{t-s}) = \rho^s \text{Var}(u_{t-s})$$

Stationäre autoregressive Prozesse

Ein AR(1)-Prozess

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

ist **stationär**, falls der Erwartungswert $E[u_t]$ und die Varianz $Var(u_t)$ für alle Elemente von $\{u_t\}$ identisch sind:

- ▶ $E[u_t] = \mu \quad \forall t$
- ▶ $Var(u_t) = \sigma^2 \quad \forall t$

Stationäre autoregressive Prozesse: $|\rho| < 1$

Für $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ mit $\rho \neq 0$ muss also gelten:

$$\underbrace{E[u_t]}_{\mu} = E[\rho u_{t-1} + \epsilon_t] = \rho \underbrace{E[u_{t-1}]}_{\mu} + \underbrace{E[\epsilon_t]}_0,$$

also $\mu = 0$ oder $\rho = 1$.

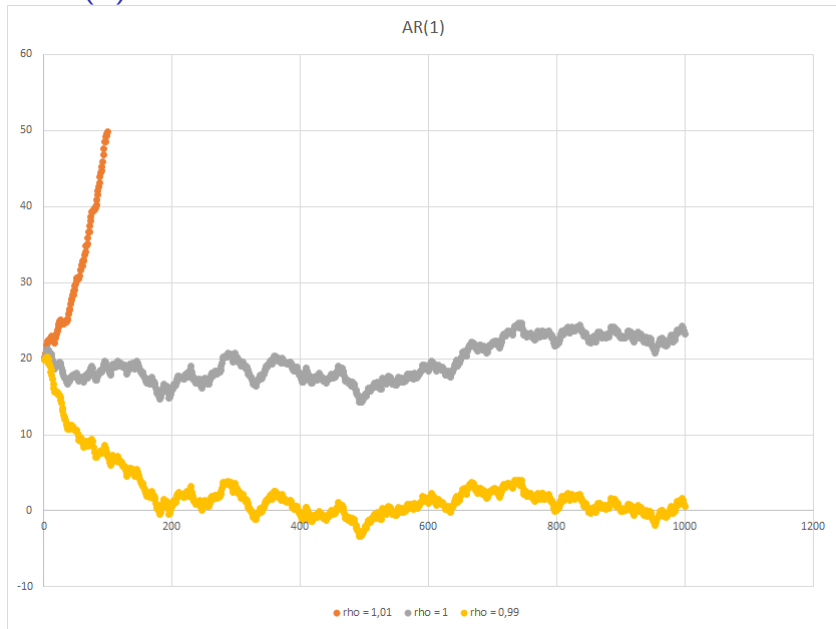
Ebenso:

$$\underbrace{Var(u_t)}_{\sigma^2} = Var(\rho u_{t-1} + \epsilon_t) = \rho^2 \underbrace{Var(u_{t-1})}_{\sigma^2} + 2\rho \underbrace{Cov(u_{t-1}, \epsilon_t)}_0 + \underbrace{Var(\epsilon_t)}_{\sigma_\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \rho^2 \sigma^2 + \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2}$$

Damit die Varianz wohldefiniert und positiv ist, muss zusätzlich $|\rho| < 1$ gelten.

Drei AR(1) Prozesse



Varianz-Kovarianz-Matrix von stationären AR(1)

Mit $\text{Var}(u_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2} = \sigma^2$ gilt:

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \text{Var}(u_1) & \text{Cov}(u_1, u_2) & \dots & \text{Cov}(u_1, u_n) \\ \text{Cov}(u_2, u_1) & \text{Var}(u_2) & \dots & \text{Cov}(u_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(u_n, u_1) & \text{Cov}(u_n, u_2) & \dots & \text{Var}(u_n) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ω ist in diesem Fall also nur durch einen Parameter (ρ) bestimmt!

Geeignete Datentransformation: „Quasidifferenzierung“

Betrachte

$$\tilde{u}_t = u_t - \rho u_{t-1} = \rho u_{t-1} + \epsilon_t - \rho u_{t-1} = \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Der Transformierte Störterm $\tilde{u}_t = \epsilon_t$ ist iid, erfüllt also $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$!

Definiere mit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformierten Daten:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y} \text{ und } \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

Anmerkungen zu **P**

Offensichtlich ist **P** nicht symmetrisch.

Die Matrix **P** ist *eine* Wurzel von $\mathbf{\Omega}^{-1}$, aber nicht die eindeutige pds-Wurzel.

Dennoch gilt:

$$\mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \rho^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \rho^2 \end{pmatrix}$$

Demnach ist mit

$$\frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1 - \rho^2} \mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' = \sigma_{\epsilon}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \rho^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Annahme **MLR 5** bis auf die 1. Zeile & Spalte erfüllt.

FGLS bei Autokorrelation

FGLS bei Autokorrelation

In der Praxis ist ρ nicht bekannt. Indem wir ρ durch eine Schätzung $\hat{\rho}$ ersetzen, erhalten wir FGLS.

Zur Schätzung von $\hat{\rho}$ können wir die OLS-Residuen $\hat{u}_t$ des ursprünglichen Modells verwenden. Die OLS-Hilfsregression

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \epsilon_t$$

liefert den Schätzwert $\hat{\rho}$.

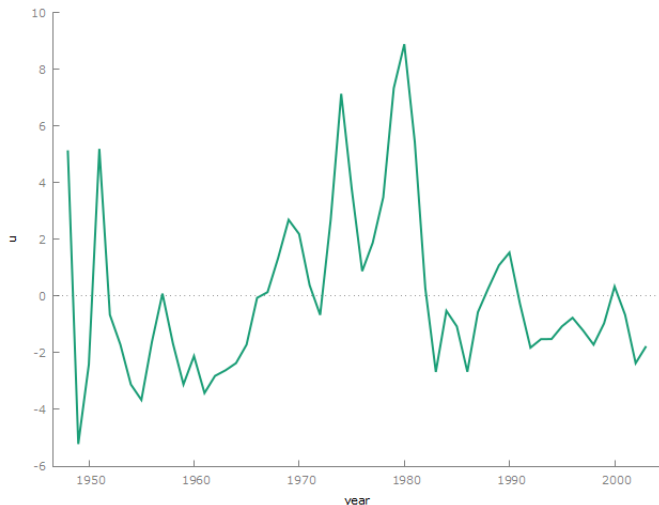
Mit diesem Schätzwert werden die Daten transformiert und die darauf angewandte OLS-Schätzung liefert den FGLS - Schätzer.

Durch die Quasidifferenzierung geht eine Beobachtung verloren. Diese spezielle FGLS - Variante heißt nach ihren Erfindern
Cochrane - Orcutt - Methode.

Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit (Philipps-Kurve)

Benutze die Daten `philipps.xls`.

Regressiere *inf* auf *unem* und erhalte folgende Residuen:



Beispiel: Inflation und Arbeitslosigkeit (Philipps-Kurve)

Regressiere die Residuen auf ihren ersten Lag ($\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$):

$$\rightarrow \hat{u}_t = 0,572055 \hat{u}_{t-1} \\ (0,107465)$$

Der Schätzer für ρ , also $\hat{\rho} = 0,572$, ist signifikant von null verschieden (p -Wert: $2 \cdot 10^{-6}$)

Dies ist ein starker Hinweis auf Autokorrelation der Störterme.

Der t -Test ist aber nur asymptotisch valide (bei großen Stichproben).

t -Test auf Autokorrelation

1. OLS-Regression des Modells $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$
2. $\rightarrow$ Residuen $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$
3. OLS-Regression des Modells $\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{u}_{t-1} + \epsilon_t$
4. $\rightarrow \hat{\delta}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1}^2}, \text{se}(\hat{\delta}_1)$
5. $H_0 : \delta_1 = 0, H_1 : \delta_1 \neq 0$
6. $\rightarrow t = \frac{\hat{\delta}_1}{\text{se}(\hat{\delta}_1)}$
7. Lehne H_0 ab, falls $|t| > c_{n-K-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$.

Problem: Der OLS-Standardfehler $\text{se}(\hat{\delta}_1)$ ist unter Verletzung von MLR 5 falsch, der t -Test ist daher nicht valide.

„Lösung“: Der t -Test ist wenigstens asymptotisch valide.

Der Durbin-Watson Test

Die Durbin-Watson (DW) Statistik ist definiert durch:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$$

Mit einigen Umformungen können wir zeigen:

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

Ist $\hat{\rho} = 1$, so ist $DW \approx 0$.

Ist $\hat{\rho} = 0$, so ist $DW \approx 2$.

Ist $\hat{\rho} = -1$, so ist $DW \approx 4$.

Demnach gilt immer:

$$0 < DW < 4$$

Durbin-Watson Test auf positive Autokorrelation

Sei u_t ein AR(1)-Prozess.

Nullhypothese:

$$H_0 : \rho = 0$$

Alternativhypothese:

$$H_1 : \rho > 0$$

Für die DW-Statistik gibt es zwei kritische Werte: d_U und d_L .

Diese beiden Werte hängen vom Signifikanz-Niveau α ab.

$DW > d_U$: H_0 kann nicht verworfen werden

$DW \in [d_L, d_U]$: keine Aussage möglich

$DW < d_L$: H_0 muss zugunsten H_1 verworfen werden

Breusch-Godfrey Test

1. Schätze $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ mit OLS und speichere die Residuen $\hat{\mathbf{u}}$.
2. Regressiere $\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$ **und** X und berechne das Bestimmtheitsmaß R^2 dieser Regression
3. Teststatistik: $BG = (n - 1)R^2 \sim_{asy} \chi_1^2$

(In gretl:

Tests $\rightarrow$ Autokorrelation. Dort wird $BG = nR^2$ berechnet.)

Der Breusch-Godfrey ist im Gegensatz zum einfachen t -Test auch dann valide, falls die Regressoren X nicht strikt exogen sind.

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

- ▶ Im Fall seriell korrelierter Störterme überschätzen die OLS-Standardfehler statistische Signifikanz, da weniger unabhängige Variation besteht.
- ▶ Serielle Korrelation-robuste Standardfehler können mit den OLS-Residuen berechnet werden.
- ▶ Das ist nützlich, da FGLS strikt Exogene Regressoren benötigt und eine sehr spezifische Form der Autokorrelation voraussetzt (AR(1) oder allgemeiner AR(q)).

$$\tilde{se}(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{se(\hat{\beta}_j)}{\hat{\sigma}} \right)^2 \sqrt{\hat{v}}$$

Die OLS-Standardfehler $se(\hat{\beta}_j)$ werden normiert und dann mit einem Faktor $\sqrt{\hat{v}}$ „aufgeblasen“.

Serielle Korrelation: Robuste Fehler

Der serielle Korrelation-robuste Standardfehler heißt auch
Newey-West Standardfehler:

$$\tilde{se}(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{se(\hat{\beta}_j)}{\hat{\sigma}} \right)^2 \sqrt{\hat{v}}$$

Der Faktor $\hat{v}$ berechnet sich wie folgt, wobei $g \in \mathbb{N}$:

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^n \hat{a}_t^2 + 2 \sum_{h=1}^g \left(1 - \frac{h+1}{g} \right) \sum_{t=h+1}^n \hat{a}_t \hat{a}_{t-1}$$

wobei

- ▶ $\hat{a}_t = \hat{r}_t \hat{u}_t$ ist und $\hat{r}_t$ das Residuum der Regression von x_{tj} auf $x_{t1}, \dots, x_{tk}$
- ▶ g die nächste ganz Zahl an $\frac{3}{4}n^{\frac{1}{3}}$

... zum Glück brauchen wir uns diese Formel nicht zu merken!

(gretl berechnet diese robusten Standardfehler per Mausklick.)

Diskussion: robuste Standardfehler

- ▶ Diese Standardfehler sind ebenfalls robust gegenüber Heteroskedastizität und werden demnach **Heteroskedastizitäts und Autokorrelation konsistent (HAC)** genannt.
- ▶ Da gewöhnlich Stichproben von Querschnittsdaten größer sind als von Zeitreihen werden Heteroskedastizitäts-robuste Standardfehler (aus Kapitel 8) häufiger benutzt.
- ▶ Die Newey-West Standardfehler sind bei starker Autokorrelation und kleinen Stichproben nicht sehr solide.

Zusammenfassung

- ▶ OLS ist bei Autokorrelation unverzerrt und konsistent, die Standardfehler sind aber falsch und dürfen nicht zur Inferenz benutzt werden.
- ▶ Ein AR(1)-Prozess $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ ist stationär, falls $|\rho| < 1$. ρ bezeichnet hier die (Auto-)Korrelation zwischen zwei sukzessiven Störtermen.
- ▶ Durch die Quasidifferenzierung $\tilde{u}_t = u_t - \hat{\rho}u_{t-1}$ wird die Autokorrelation von AR(1)-Prozessen neutralisiert.
- ▶ Der Durbin-Watson Test oder der Breusch-Godfrey Test können Autokorrelation feststellen.
- ▶ Mit Heteroskedastizitäts- und Autokorrelation konsistenten Standardfehlern (HAC) sind t - und F -Tests valide.